BULLETIN OFFICIEL
ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
RECHERCHE ET INNOVATION

Bulletin officiel n°31 du 26 août 2021

SOMMAIRE

Objectifs de formation et programme des classes préparatoires de seconde année de physique et sciences de l'ingénieur (PSI) et de physique et sciences de l'ingénieur* (PSI*) : modification
arrêté du 13-7-2021 - JO du 5-8-2021 (NOR : ESRS2111748A)

Classes préparatoires scientifiques

Programmes de mathématiques et de physique-chimie des classes préparatoires de seconde année de mathématiques, physique et informatique (MPI) et de mathématiques, physique et informatique* (MPI*)
arrêté du 13-7-2021 - JO du 5-8-2021 (NOR : ESRS2111756A)

Parcoursup

Calendrier de la procédure nationale de préinscription pour l'accès aux formations initiales du premier cycle de l'enseignement supérieur en Nouvelle-Calédonie - session 2021-2022
arrêté du 29-7-2021 - JO du 1-8-2021 (NOR : ESRS2121677A)

Brevet de technicien supérieur

Thème concernant l'enseignement de culture audiovisuelle et artistique du brevet de technicien supérieur métiers de l'audiovisuel - session 2023
note de service du 19-7-2021 (NOR : ESRS2122176N)

Personnels

Promotion de grade

Accès à l'échelon exceptionnel de la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers - année 2021
note de service du 28-6-2021 (NOR : ESRH2121751N)

Promotion de grade

Accès au grade de professeur hors classe de l'École nationale supérieure d'arts et métiers - année 2021
note de service du 28-6-2021 (NOR : ESRH2121756N)

Mouvement du personnel

Nomination

Directeur de l'université de technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM)
arrêté du 16-7-2021 (NOR : ESRS2122326A)

Nomination

Déléguée régionale académique adjointe à la recherche et à l'innovation
arrêté du 16-7-2021 (NOR : ESRR2122342A)

Nomination

Directeur de l'École nationale supérieure des industries chimiques de l'université de Lorraine (Ensic)
arrêté du 22-7-2021 (NOR : ESRS2123032A)

Nomination

Commission des titres d'ingénieur
arrêté du 22-7-2021 (NOR : ESRS2123828A)

Nomination

Déléguée régionale académique à la recherche et à l'innovation
arrêté du 9-8-2021 (NOR : ESRR2122331A)

Nomination

Administrateur provisoire de l'Institut national supérieur du professorat et de l'éducation de l'académie de Nice au sein de l'université Côte d'Azur
arrêté du 26-8-2021 (NOR : ESRS2123045A)

Intégration

Inspection générale de l'éducation, du sport et de la recherche
décret du 19-7-2021 - JO du 21-7-2021 (NOR : MENI2119085D)

Informations générales

Conseils, comités, commissions

Liste nominative des représentants à la commission centrale d'action sociale : modification
arrêté du 29-7-2021 (NOR : MENA2125038A)

Conseils, comités, commissions

Désignation des membres des commissions spéciales consultatives du personnel enseignant de théologie
arrêté du 29-7-2021 (NOR : ESRS2123212A)

Services régionaux académiques

Création d'un service régional académique des études et des statistiques dans la région académique Hauts-de-France
arrêté du 20-7-2021 (NOR : MENG2123261A)

Enseignement supérieur et recherche

Camondo Paris

Autorisation à délivrer le diplôme architecte d'intérieur-designer visé par le ministère chargé de l'enseignement supérieur et conférant le grade de master à ses titulaires

NOR : ESRS2122672A
arrêté du 19-7-2021
MESRI - DGESIP A1-5

Vu Code de l'éducation, notamment articles L. 443-2, L. 443-3, L. 443-4 et L. 641-5 ; arrêté du 8-3-2001 ; arrêté du 28-6-2016 ; arrêté du 30-7-2018 ; avis du Cneser du 6-7-2021

Article 1 - L'autorisation à délivrer le diplôme visé architecte d'intérieur-designer (Bac+5, RNCP niveau 7) par l'établissement Camondo à Paris, est renouvelée pour une durée de cinq ans et est autorisé à conférer le grade de master aux titulaires du diplôme pour une durée de trois ans, à compter du 1er septembre 2021.

Article 2 - Dans le cadre du système d'information sur le suivi de l'étudiant institué par l'arrêté du 30 juillet 2018 susvisé, l'établissement s'engage à fournir annuellement au ministère chargé de l'enseignement supérieur les informations relatives aux effectifs qu'il accueille.

Article 3 - La directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle est chargée de l'exécution du présent arrêté qui sera publié au Bulletin officiel de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation.

Fait le 19 juillet 2021

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
La directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Anne-Sophie Barthez

Enseignement supérieur et recherche

Enseignement privé

Qualification d'établissement d'enseignement supérieur privé d'intérêt général

NOR : ESRS2123026A
arrêté du 22-7-2021
MESRI - DGESIP A1-5

Par arrêté de la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation en date du 22 juillet 2021,
1° Les établissements ci-dessous listés obtiennent le renouvellement de la qualification d'établissement d'enseignement supérieur privé d'intérêt général (EESPIG) définie à l'article L. 732-1 du Code de l'éducation à compter du 1er janvier 2021 :

Établissements bénéficiant du renouvellement de la qualification d'EESPIG	jusqu'au
École supérieure d'agricultures d'Angers (ESA Angers)	31/12/2024
Purpan	31/12/2023
Isara	31/12/2023
Institut catholique de Lyon	31/12/2026
École supérieure de chimie, physique, électronique de Lyon (ESCPE Lyon)	31/12/2026
Institut textile et chimique de Lyon (Itech Lyon)	31/12/2026
Institut catholique de Toulouse (ICT)	31/12/2026
Montpellier Business School (MBS)	31/12/2026

2° Les établissements ci-dessous listés obtiennent la prolongation de la qualification d'établissement d'enseignement supérieur privé d'intérêt général définie à l'article L. 732-1 du Code de l'éducation à compter du 1er janvier 2021 :
- Istom : école supérieure d'agro-développement international, du 1er janvier 2020 jusqu'au 31 décembre 2021 ;
- École d'enseignement supérieur privé (ICN), du 1er janvier 2022 jusqu'au 31 décembre 2022.

Enseignement supérieur et recherche

Statut national d'étudiant-entrepreneur

Modalités d'attribution et droits ouverts par ce statut

NOR : ESRS2121531C
circulaire du 9-6-2021
MESRI - DGESIP A1-1

Texte adressé aux recteurs et rectrices de région académique, chanceliers et chancelières des universités ; aux recteurs délégués et rectrices déléguées pour l'enseignement supérieur, la recherche et l'innovation ; aux recteurs et rectrices d'académie ; aux présidentes et présidents d'université ; aux directeurs et directrices des écoles d'enseignement supérieur ; aux directeurs et directrices des pôles étudiants pour l'innovation, le transfert et l'entrepreneuriat ; aux proviseures et proviseurs des lycées ; à la présidente du Cnous ; aux directeurs généraux et directrices générales des Crous

La présente circulaire fixe les modalités d'attribution du statut national d'étudiant-entrepreneur (SNEE) et les droits et avantages conférés par ce statut.
Le plan L'esprit d'entreprendre a vocation à développer la culture entrepreneuriale et à favoriser le portage de projets entrepreneuriaux par les jeunes, qu'ils soient bacheliers, étudiants ou jeunes diplômés de l'enseignement supérieur, quel que soit le cycle d'études poursuivi et dans toutes les filières de formation.
Ce plan vise à favoriser l'insertion professionnelle des étudiants et des diplômés par l'acquisition de compétences entrepreneuriales complémentaires à celles acquises dans le cadre de leur cursus de formation.
Parmi ces jeunes, ceux qui portent la responsabilité d'un projet entrepreneurial pour eux-mêmes ou qui le développent dans le cadre d'une structure existante (intrapreneuriat) peuvent solliciter le statut national d'étudiant-entrepreneur reconnu par l'enseignement supérieur et diffusé auprès des partenaires socio-économiques.
Ce statut a vocation à soutenir les personnes qui souhaitent s'engager dans un projet entrepreneurial qui donne lieu à une création ou à une reprise d'activité, qu'il s'agisse de la création/reprise d'une entreprise, d'une association, de la création d'un grand événement, de la création d'une activité nouvelle au sein d'une structure existante (intrapreneuriat) et cela quelle qu'en soit la finalité ou combinaison de finalités (économique, sociale, culturelle, écologique, etc.).
Le statut national d'étudiant-entrepreneur permet de poursuivre des études tout en élaborant un projet entrepreneurial, car il favorise dans la mesure du possible des aménagements dans l'organisation des études. Il donne accès aux moyens et compétences utiles à la réussite du projet entrepreneurial.
Il est un signal qui donne de la visibilité et de la crédibilité à ces jeunes entreprenants, permettant de faciliter leurs relations professionnelles avec les clients, fournisseurs, partenaires ou financeurs, etc. Il rassure également les familles en reconnaissant le projet entrepreneurial comme faisant partie de leurs études, dans un parcours de formation complémentaire.
Le SNEE est en lien avec le diplôme d'établissement étudiant-entrepreneur (D2E) qui renforce l'aide à l'élaboration du projet en vue d'un passage à l'acte en proposant des séminaires, ateliers et mentorats spécifiques. Le jeune diplômé inscrit au diplôme d'étudiant-entrepreneur retrouve le statut d'étudiant et bénéficie d'une protection sociale, du maintien des droits à bourse en cas d'éligibilité et d'une aide dans la recherche de soutiens financiers.

I. Les conditions d'éligibilité au SNEE

Le SNEE est accessible à toute personne titulaire du baccalauréat ou de son équivalence en niveau :

- inscrite dans un cursus en formation initiale ou en formation continue préparant un diplôme de l'enseignement supérieur délivré au nom de l'État *[1]* ;

ou

- inscrite au D2E (diplôme universitaire d'étudiant-entrepreneur) en formation initiale ou continue, dans les conditions particulières qui seront proposées par le pôle étudiant pour l'innovation, le transfert et l'entrepreneuriat (Pépite) de rattachement de son projet. L'accès au SNEE est donc ouvert, en particulier, aux personnes détentrices d'un doctorat et inscrites dans un programme post-doctoral.

Ce statut est délivré par le ministère en charge de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, au vu de l'instruction de la candidature réalisée par le Pépite auquel la candidature a été adressée.

II. Les conditions et la procédure d'attribution du SNEE

La délivrance du statut d'étudiant-entrepreneur à un candidat est appréciée au regard :

- de sa motivation à entreprendre : capacité du candidat à expliquer le sens et les motifs de sa démarche, ainsi que ses objectifs personnels et professionnels ;
- de la réalité des démarches exploratoires initiées préalablement par le candidat pour tenter d'évaluer l'opportunité du projet : qualité de la présentation par le candidat des recherches documentaires réalisées, des contacts pris auprès de professionnels, du questionnement de bénéficiaires potentiels, ainsi que des premières ébauches de proposition du projet (fiche descriptive) ;
- de sa compréhension de l'intérêt du SNEE et de la portée de l'engagement que l'obtention de ce statut implique de la part du candidat : capacité du candidat à se projeter en étant titulaire du SNEE, à être dans une posture apprenante, et dans le respect de la charte de l'étudiant-entrepreneur.

Pour les étudiants ou stagiaires de la formation continue inscrits dans un établissement, le Pépite compétent pour instruire la candidature est celui du **site auquel son établissement est rattaché**.

Pour les candidats qui ne sont pas inscrits dans un établissement, le Pépite compétent pour instruire la candidature est le plus proche du lieu envisagé pour la future **implantation du projet entrepreneurial**.

Le comité d'engagement du Pépite est chargé d'instruire les candidatures pour le ministère en charge de l'enseignement supérieur et de la recherche. Il est composé de référents entrepreneuriat des établissements du Pépite, d'intervenants du D2E, de mentors habituellement mobilisés par le Pépite et de membres de l'équipe Pépite.

Le SNEE est valable pour une année académique. Il peut être renouvelé sur la demande expresse de la personne bénéficiaire. Dans ce cas, le comité d'engagement statue en fonction de l'engagement du bénéficiaire sur son projet dans la période passée et de sa participation effective aux activités proposées par le Pépite.

III. Droits ouverts par le SNEE

Le SNEE ouvre un certain nombre de droits à prestations qui sont activés en fonction de la situation particulière de chaque personne et notamment :

- de la maturité de son projet, depuis l'idéation jusqu'à l'accompagnement du début d'activité ;
- qu'il soit inscrit ou non au D2E.

a) Chaque titulaire du SNEE bénéficie *a minima* de :

- la supervision de son parcours par le référent entrepreneuriat de sa composante ou de son établissement, avec l'appui du Pépite ;
- un accompagnement par un mentor ou référent à travers des réunions individuelles ou collectives, avec un minimum de 3 réunions ;
- l'invitation aux événements organisés ou relayés par le pôle Pépite et adaptés au niveau de maturité de son projet ;
- l'accès à un outil de gestion d'activité partagé par l'ensemble des étudiants-entrepreneurs, favorisant les échanges au sein de la communauté ;
- l'accès à la bibliothèque de ressources dédiées aux titulaires du SNEE ;
- l'accès à un espace de travail de type co-working lorsqu'il est prévu par son établissement ;
- la possibilité de postuler au prix Pépite tremplin ;
- la possibilité de solliciter des aménagements d'horaires auprès de son établissement *[2]* ;

- la possibilité suivant les modalités du contrôle de connaissances ou du contenu de sa formation de demander au responsable de sa formation de dédier une période de professionnalisation (stage) à son projet entrepreneurial *[3]* ;
- la possibilité de solliciter auprès de son établissement un semestre ou une année de césure pour développer son projet entrepreneurial *[4]* ;
- la possibilité de réaliser un contrat d'alternance pour un projet intrapreneurial dans une structure (entreprise, association, administration ou collectivité) lorsque cela est compatible avec le régime d'études.

b) Des prestations supplémentaires peuvent être accordées aux porteurs d'un projet jugé comme avancé selon les critères de son Pépite :

- la supervision de son parcours par un chargé de projet de l'équipe Pépite ;
- un accompagnement de son projet avec un minimum de 5 réunions par un mentor dédié. (L'affectation d'un second mentor sera proposée dans la mesure du possible pour les projets qui le nécessitent) ;
- l'accès à l'ensemble de l'offre de formation du D2E (séminaires, ateliers, etc.) sous réserve d'inscription aux différentes séances ;
- la possibilité de postuler au programme de mobilité internationale Pépite France ;
- la mise en relation avec l'écosystème entrepreneurial partenaire du Pépite ;
- l'aide pour construire la stratégie de financement du projet ;
- la possibilité pour l'étudiant-entrepreneur de signer un contrat d'appui au projet d'entreprise (Cape) avec une structure type couveuse ou coopérative d'activité et d'emploi (CAE) ou autre partenaire du Pépite.

IV. Diplôme étudiant-entrepreneur (D2E)

Le diplôme d'étudiant-entrepreneur est un diplôme d'établissement coordonné au niveau national. Il est assis sur le référentiel de compétences entrepreneuriales « Concevoir et développer un projet entrepreneurial » qui a été adopté par le réseau Pépite et enregistré au Répertoire spécifique des certifications et des habilitations (RS) tenu par France compétences en vertu de l'article L. 6113-6 du Code du travail.
Chaque établissement peut organiser librement le cursus de préparation au D2E dans la mesure où les contenus et les modalités pédagogiques contribuent à atteindre les objectifs du référentiel de compétences entrepreneuriales.

a) Conditions d'accès au D2E

Le D2E est ouvert :

- aux titulaires du SNEE en cours d'études qui souhaitent approfondir leurs connaissances et leurs compétences en entrepreneuriat en complément de leur cursus principal ;
- aux diplômés qui ne sont plus inscrits dans un établissement d'enseignement supérieur et qui veulent acquérir les compétences utiles à leur projet entrepreneurial ;
- aux personnes relevant de la formation continue qui veulent acquérir les compétences utiles à leur projet entrepreneurial.

Dans la mesure où le D2E s'appuie sur le référentiel de compétences entrepreneuriales « Concevoir et développer un projet entrepreneurial » dont la certification est inscrite au Répertoire spécifique des certifications et des habilitations (RS), il est accessible à toute personne qui n'est pas inscrite dans une formation initiale de l'enseignement supérieur et qui veut acquérir les compétences utiles à son projet entrepreneurial. Il peut donc être financé par le compte personnel de formation.
La formation étant accessible aux demandeurs d'emploi, ces derniers peuvent aussi demander à faire financer le D2E par Pôle emploi ou par un autre programme, par exemple organisé par une collectivité territoriale, ou l'Agefiph en cas de handicap.

b) Droits de la personne inscrite au D2E

Le D2E appartient à la catégorie des diplômes propres aux établissements publics à caractère scientifique, culturel et professionnel (EPSCP) ayant fait l'objet d'une habilitation à recevoir des boursiers sur critères sociaux (cf. circulaire annuelle du ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et l'Innovation relative aux modalités d'attribution des bourses d'enseignement supérieur sur critères sociaux, des aides au mérite et des aides à la mobilité internationale).
Tout étudiant inscrit dans le diplôme d'établissement étudiant-entrepreneur peut, sous réserve de respecter

les conditions prévues par la réglementation en vigueur (ressources, âge, nationalité, progression dans les études, etc.), bénéficier d'une bourse d'enseignement supérieur sur critères sociaux.
La formation est organisée sur une année, ou sur deux années après la demande de l'étudiant-entrepreneur, sur validation du responsable pédagogique si ce rythme lui semble mieux adapté.
Le D2E organisé sur un an peut être prolongé une fois lorsque l'étudiant n'a pas réussi à valider le diplôme, après avis favorable du comité d'engagement.
Chaque année supplémentaire nécessite une nouvelle inscription.
Toute personne qui s'inscrit uniquement en D2E, à l'exclusion de tout autre cursus, bénéficie par ailleurs des mêmes avantages que les titulaires du SNEE porteurs d'un projet jugé comme avancé par le Pépite (cf. point III.b).

[1] Diplôme national BTS, DEUST, DUT, licence professionnelle, licence, master, doctorat, diplôme d'État, titre d'ingénieur, diplôme conférant grade de licence ou de master, diplôme visé par l'État.
[2] Arrêté du 30 juillet 2019 définissant le cadre national de scolarité et d'assiduité des étudiants inscrits dans une formation relevant du ministère chargé de l'enseignement supérieur.
[3] Article D. 611-9 du Code de l'éducation.
[4] Article D. 611-16 du Code de l'éducation.

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
La directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle,
Anne-Sophie Barthez

Enseignements secondaire et supérieur

Classes préparatoires scientifiques

Objectifs de formation et programme des classes préparatoires de seconde année de mathématiques et physique (MP) et de mathématiques et physique* (MP*) : modification

NOR : ESRS2111702A
arrêté du 13-7-2021 - JO du 5-8-2021
MESRI - DGESIP A1-2 - MENJS - DGESCO - MOM

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 20-6-1996 modifié ;avis du Cneser du 8-6-2021 ; avis du CSE du 17-6-2021 ; avis de la ministre des Armées des 1er, 2, 5 et 6-7-2021

Article 1 - Les programmes de mathématiques, de physique et de chimie de seconde année de la classe préparatoire scientifique mathématiques et physique (MP), annexés à l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, sont remplacés par les programmes de mathématiques et de physique-chimie figurant respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis et Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 4 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 13 juillet 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer, et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle, et par délégation,
La cheffe du service de la stratégie des formations et de la vie étudiante, adjointe à la directrice générale,
Isabelle Prat

Annexes

Programmes des classes préparatoires de seconde année de mathématiques et physique (MP) et de mathématiques et physique (MP*)*

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques et physique (MP)

Annexe 1

Programme de mathématiques

Classes préparatoires MP et MPI
Programme de mathématiques

Table des matières

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la théorie des équations différentielles utilise des concepts et des résultats développés en algèbre linéaire ; le calcul différentiel et l'optimisation exploitent en outre les endomorphismes autoadjoints ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend trois sections. La première formalise les différentes structures algébriques rencontrées dans le programme, introduit l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme exemple de structure quotient et étudie l'anneau $\mathbb{K}[X]$. La deuxième prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et combine les points de vue géométrique (éléments propres), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matriciel pour aboutir à une théorie de la réduction substantielle : diagonalisation, trigonalisation, sous-espaces caractéristiques. La troisième, située dans le cadre euclidien, étudie la notion d'adjoint, les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints (théorème spectral), et introduit les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation.

La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, d'étudier la continuité des applications linéaires (normes subordonnées), d'introduire les concepts de compacité et de connexité par arcs et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, caractérisation des compacts, continuité des applications linéaires et polynomiales.
La section sur les séries complète l'étude des séries numériques abordée en première année et la prolonge par celles des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
La définition des différents modes de convergence d'une suite de fonctions bénéficie du cadre topologique introduit dans la section « Espaces vectoriels normés ». L'étude des suites et séries de fonctions conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme et aboutit à l'énoncé de deux théorèmes d'approximation.
Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires.
La section sur les fonctions vectorielles étend rapidement aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie les résultats d'analyse réelle étudiés en première année et fournit des outils pour les équations différentielles et le calcul différentiel.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable. L'intégration des relations de comparaison dans le cas des fonctions positives permet de faire le lien avec les théorèmes similaires étudiés sur les séries.
Les théorèmes sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes introduit rapidement les notions générales de la théorie des probabilités afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet d'utiliser l'exponentielle d'endomorphisme et de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.

La section sur le calcul différentiel et l'optimisation a pour objectif d'étendre l'étude menée en première année au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie et de donner une introduction à l'optimisation au premier et au second ordre. La différentielle en un point est définie de manière intrinsèque afin d'établir un lien avec l'algèbre linéaire. Les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une partie constituent une première approche de la géométrie différentielle. Enfin, l'optimisation au second ordre s'appuie sur les endomorphismes autoadjoints.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Programme

Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques offre l'occasion d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire, ou, ultérieurement, de la géométrie des espaces euclidiens.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique mettant l'accent sur la notion d'idéal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les groupes	
Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	
Ordre d'un élément d'un groupe.	L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \iff d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.
c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.
d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.
e) Anneaux $\mathbb{K}[X]$	
Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Par convention, le PGCD est unitaire.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

f) Algèbres

Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Compléments d'algèbre linéaire

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Matrices définies par blocs. Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	Interprétation géométrique des blocs. La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible. Transvections par blocs. Invariance du déterminant.
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	

b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction matricielle.
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Le noyau et l'image de u sont stables par v.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle. Cas où χ_u est scindé à racines simples.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.	
h) Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$	
i) Polynômes annulateurs et réduction	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.	Traduction matricielle.
j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.	Dimension d'un sous-espace caractéristique.
Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	

Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est double :

- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre* 2.

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.	
Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie en base orthonormée.	Interprétation matricielle.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.

f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathscr{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E), \mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Topologie des espaces vectoriels normés

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires) ;*
- *introduire la notion de partie compacte dans un espace vectoriel normé, en soulignant le rôle qu'elle joue dans les résultats d'existence, notamment en matière d'optimisation ;*
- *introduire la notion de composante connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et intervient en calcul différentiel ;*
- *dégager l'idée fondamentale d'inégalité linéaire, qui apparaît lors de l'étude de la comparaison des normes et de la continuité des applications linéaires, et qui est quantifiée par la notion de norme d'opérateur.*

Les notions seront illustrées par des exemples variés. On pourra ainsi travailler dans les espaces $\mathbb{K}^n$, les espaces de polynômes, d'applications linéaires ou de matrices, ainsi que dans divers espaces fonctionnels.

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures. Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Normes et espaces vectoriels normés

Contenus	Capacités & commentaires
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$, $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\| \|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	Notations $\| \|_1$ et $\| \|_2$.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

c) Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.

e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Contenus	Capacités & Commentaires
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E.

f) Applications linéaires et multilinéaires continues

Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$.
Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.	Notations $\lvert\lvert\lvert u \rvert\rvert\rvert$, $\|u\|_{\text{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.
Critère de continuité des applications multilinéaires.	La démonstration n'est pas exigible.

g) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Un fermé relatif d'une partie compacte est compact. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

h) Applications continues sur une partie compacte

Image continue d'une partie compacte. Théorème de Heine.	
Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.

i) Connexité par arcs

Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.	
Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}_c(E,F)$.	
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Séries numériques et vectorielles

L'objectif de cette section est double :

- *consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques, en particulier à travers l'étude de questions de calcul asymptotique ;*
- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie.*

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert.	
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Suites et séries de fonctions, séries entières

A - Suites et séries de fonctions

Les objectifs de cette section sont les suivants :
- *définir différents modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *introduire la thématique de l'approximation, reliée à la notion topologique de densité, à travers deux théorèmes d'approximation uniforme susceptibles de nombreuses applications.*

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie les exemples significatifs : construction de fonctions solutions de problèmes (équations fonctionnelles ou différentielles, par exemple), mise en évidence de fonctions aux propriétés remarquables...

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.

e) Séries de fonctions

Contenus	Capacités & Commentaires
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.

f) Approximation uniforme

Contenus	Capacités & Commentaires
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

B - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de fonction développable en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Généralités

Contenus	Capacités & commentaires
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être utilisée directement.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Théorème d'Abel radial : si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.	La démonstration est hors programme.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0,\alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
d) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R,R[$. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \|z\| < 1\}$.	Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
Développements usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Fonctions vectorielles

Cette section a deux objectifs :

- *étendre rapidement le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction en termes de coordonnées dans une base.
Dérivabilité à droite et à gauche.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire.	
Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est multilinéaire.	Cas du produit scalaire, du déterminant.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	

c) Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$. Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	

e) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est triple :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*
- *donner des outils efficaces de passage à la limite sous l'intégrale, en particulier le théorème de convergence dominée ;*
- *compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.*

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs : transformées intégrales (Fourier, Laplace), intégrales eulériennes...

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$.	
Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} \mathrm{d}t$.	

b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Contenus	Capacités & Commentaires
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} \lvert f \rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I \lvert f \rvert < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Contenus	Capacités & commentaires
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b, en a.
Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha} \mathrm{d}x$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

e) Intégration des relations de comparaison

Contenus	Capacités & commentaires
Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

f) Convergence dominée

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & commentaires
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	

g) Intégration terme à terme

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & commentaires
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0, +\infty]$, $$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

h) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & Commentaires
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue ; – pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux ; – il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x\in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x\in A,\qquad g'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Variables aléatoires discrètes

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.	Notations $P_B(A)$, $P(A\|B)$.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Espaces probabilisés discrets	
Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.
e) Variables aléatoires discrètes	
Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.	Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle. Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X.
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.
Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.	
La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.	
Notation $X \sim Y$.	La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.
Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.	
Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$	Extension au cas de plus de deux variables.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
g) Lois usuelles	
Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p.	Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x\, P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\, P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1.
Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\, P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, P(X = x)$.	
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.
Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.	
Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Si $\mathrm{E}\left(X^2\right) < +\infty$, X est d'espérance finie.	La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$.	Cas d'égalité.
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.	

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
k) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k$.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Équations différentielles linéaires

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La pratique de la résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limite en conséquence la technicité des exercices sur ce point. On peut en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter les courbes intégrales.

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A'(t)X + B(t).$$
où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$, $\quad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$.	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	

Calcul différentiel et optimisation

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$;*
- *donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.*

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.

Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\dots,x_n)$.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1. Lorsque $f = (f_1,\dots,f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notation $\mathrm{d}f(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, application linéaire.	
Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

c) Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables.	
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$

d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0,1]$.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors T_xX est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

f) Optimisation : étude au premier ordre

Point critique d'une application différentiable.	
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$, $\partial_{j_1,\dots,j_k} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles.
Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

h) Optimisation : étude au second ordre

Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\Vert h\Vert^2)$, $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\Vert h\Vert^2)$.	La démonstration n'est pas exigible.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n = 2$ (trace et déterminant).

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques et physique (MP)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie MP

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de MP est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de MPSI. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée **« Contenus thématiques »** est structurée autour de neuf thèmes : « Mécanique », « Éléments de traitement du signal », « Optique », « Électromagnétisme », « Thermodynamique », « Physique quantique », « Éléments de thermodynamique statistique », « Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques » et « aspects

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

thermodynamique et cinétique de l'électrochimie ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras** dans la colonne « capacités exigibles », se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de MP.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

	- Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	    o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	    o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	    o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de MP durant les séances de travaux pratiques. Elle vient

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

prolonger la partie correspondante du programme de MPSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de la classe de MP.
Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Les activités expérimentales sur le thème de la chimie sont aussi l'occasion de consolider les savoir-faire de la classe de MPSI en particulier dans le domaine des solutions aqueuses.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de temps et de fréquences	
Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
2. Électricité et électronique	
Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel.
Montages utilisant un amplificateur linéaire intégré (ALI).	Mettre en œuvre divers montages utilisant un ALI, les schémas des montages étant fournis.
Électronique numérique.	Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.
Ondes électromagnétiques.	Mettre en œuvre un détecteur d'ondes électromagnétiques dans le domaine des ondes centimétriques.
3. Optique	
Analyse d'une lumière.	Identifier, à l'aide d'un polariseur, une onde polarisée rectilignement et déterminer sa direction de polarisation. Mesurer une longueur d'onde à l'aide d'un goniomètre équipé d'un réseau.
Analyse d'une figure d'interférence.	Mettre en œuvre un photodétecteur en sortie d'un interféromètre.

Étude de la cohérence temporelle d'une source.	Régler un interféromètre de Michelson compensé pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole fourni. Obtenir une estimation de la longueur de cohérence d'une source et de l'écart spectral d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air.
4. Thermodynamique	
Conduction thermique.	Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique.
5. Thermodynamique de la transformation chimique et électrochimie	
Bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie. Déterminer la valeur en eau d'un calorimètre. Estimer les fuites thermiques lors d'expériences réalisées avec un calorimètre.
Mesures de grandeurs électriques. : conductance-conductivité, tension électrique, intensité du courant.	Mettre en œuvre des mesures de grandeurs physiques pour déterminer la composition d'un système chimique.
Électrochimie.	Mettre en œuvre un dispositif à trois électrodes pour tracer des courbes courant-potentiel. Mettre en œuvre des piles et des électrolyseurs.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
2. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de neuf thèmes.

1. Mécanique

1.1. Référentiels non galiléens
1.2. Lois du frottement solide

2. Éléments de traitement du signal

2.1. Signaux périodiques
2.2. Électronique numérique

3. Optique

3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses
3.2. Superposition d'ondes lumineuses
3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue

4. Électromagnétisme

4.1. Électrostatique
4.2. Magnétostatique
4.3. Équations de Maxwell
4.4. Énergie du champ électromagnétique
4.5. Propagation et rayonnement

5. Thermodynamique

5.1. Principes de la thermodynamique
5.2. Transferts thermiques

6. Physique quantique

6.1. Fonction d'onde et équation de Schrödinger
6.2. Particule libre
6.3. États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux
6.4. États non stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini

7. Éléments de thermodynamique statistique

7.1. Facteur de Boltzmann
7.2. Système à spectres discrets d'énergie
7.3. Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

8. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques

8.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
8.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques

9. Aspects thermodynamique et cinétique de l'électrochimie

9.1. Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction
9.2. Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel
9.3. Stockage et conversion d'énergie chimique dans des dispositifs électrochimiques
9.4. Corrosion humide et électrochimique

1. Mécanique

Le programme de mécanique de MP vise à compléter les acquis de mécanique du cours de MPSI. Il est structuré en deux sous-parties : la première est consacrée aux changements de référentiels, la seconde aux conséquences mécaniques des actions de frottements entre solides.

La partie intitulée « **Référentiels non galiléens** » est organisée autour de deux situations : la translation et la rotation uniforme autour d'un axe fixe. L'accent est mis sur la compréhension qualitative des effets observés, l'évaluation des ordres de grandeurs et les conséquences expérimentales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Référentiels non galiléens	
Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre dans les cas du mouvement de translation et du mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.	Reconnaître et caractériser un mouvement de translation et un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel par rapport à un autre.
Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.	Exprimer le vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation, et dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : vitesse d'entraînement, accélérations d'entraînement et de Coriolis.	Relier les dérivées d'un vecteur dans des référentiels différents par la relation de la dérivation composée. Citer et utiliser les expressions de la vitesse d'entraînement et des accélérations d'entraînement et de Coriolis.
Dynamique du point en référentiel non galiléen dans le cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Forces d'inertie.	Exprimer les forces d'inerties, dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Décrire et interpréter les effets des forces d'inertie dans des cas concrets : sens de la force d'inertie d'entraînement dans un mouvement de translation ; caractère centrifuge de la force d'inertie d'entraînement dans le cas où le référentiel est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Utiliser les lois de la dynamique en référentiel non galiléen dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.

Caractère galiléen approché d'un référentiel. Exemple du référentiel de Copernic, du référentiel géocentrique et du référentiel terrestre.	Citer quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre. Estimer, en ordre de grandeur, la contribution de la force d'inertie de Coriolis dans un problème de dynamique terrestre.

La partie « **Lois du frottement solide** », est limitée au seul cas de la translation ; elle permet de mettre en œuvre un mode de raisonnement spécifique et particulièrement formateur, sans pour autant omettre les conséquences expérimentales.

1.2. Lois du frottement solide	
Contact entre deux solides. Aspects microscopiques. Lois de Coulomb du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation. Aspect énergétique.	Utiliser les lois de Coulomb dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider. Effectuer un bilan énergétique. **Effectuer une mesure d'un coefficient de frottement.** Capacité numérique **:** à l'aide d'un langage de programmation, simuler une situation mécanique dans laquelle intervient au moins un changement de mode de glissement.

2. Éléments de traitement du signal

Ce thème du programme, décomposé en deux parties, complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « **Ondes et signaux** » du programme de MPSI. La composante expérimentale est forte et les capacités exigibles ont vocation à être principalement développées au cours de séances de travaux pratiques.

Dans la première partie intitulée « **Signaux périodiques** », l'accent est mis sur l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique, l'objectif étant de comprendre le rôle central de la linéarité des systèmes pour interpréter ou prévoir la forme du signal résultant d'un filtrage.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.1. Signaux périodiques	
Signaux périodiques.	Commenter le spectre d'un signal périodique : relier la décomposition spectrale et l'allure du signal dans le domaine temporel.
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique**.

La seconde partie intitulée « **Électronique numérique** » est à vocation uniquement expérimentale ; elle constitue une initiation au traitement numérique des signaux à travers les points suivants : l'échantillonnage et le repliement de spectre, la conversion analogique/numérique et le filtrage numérique. Le phénomène de repliement de spectre est présenté qualitativement au moyen d'illustrations démonstratives, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon afin de réaliser convenablement une acquisition numérique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Électronique numérique	
Échantillonnage, fréquence d'échantillonnage. Conséquences expérimentales du théorème de Nyquist-Shannon.	**Réaliser l'échantillonnage d'un signal. Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.** **Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage.** **Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.**
Filtrage numérique.	**Mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.** Capacité numérique **:** à l'aide d'un langage de programmation, simuler un filtrage numérique et visualiser son action sur un signal périodique.

3. Optique

Le programme d'optique de la filière MP s'inscrit dans le prolongement du thème « **Ondes et signaux** » du programme de MPSI. Il s'agit pour les étudiants d'approfondir l'étude des phénomènes d'interférences lumineuses, dans le cadre du modèle ondulatoire de la lumière. L'approche reste centrée sur l'expérience, mais la modélisation doit permettre d'analyser de façon raisonnée les conditions optimales d'observation d'interférences lumineuses, et leur exploitation quantitative. L'enseignant ne manquera pas de rappeler que ces phénomènes, étudiés ici dans le cadre de l'optique, sont généralisables à tout comportement ondulatoire.

La partie « **Modèle scalaire des ondes lumineuses** » introduit les outils nécessaires pour décrire les phénomènes d'interférences. Le programme utilise le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut utiliser indifféremment les mots « intensité » ou « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau. L'intensité lumineuse est introduite comme une puissance par unité de surface. Le théorème de Malus (orthogonalité des rayons de lumière et des surfaces d'ondes) est admis.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses	
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique.	Utiliser une grandeur scalaire pour décrire un signal lumineux.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Chemin optique. Déphasage dû à la propagation. Surfaces d'ondes. Théorème de Malus (admis). Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Exprimer le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique. Associer une description de la formation des images en termes de rayon lumineux et en termes de surfaces d'onde. Utiliser la propriété énonçant que le chemin optique séparant deux points conjugués est indépendant du rayon lumineux choisi.
Modèle d'émission. Relation (admise) entre le temps de cohérence et la largeur spectrale.	Citer l'ordre de grandeur du temps de cohérence Δt de quelques radiations visibles. Utiliser la relation $\Delta f.\ \Delta t \sim 1$ pour relier le temps de cohérence à la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la radiation.
Récepteurs. Intensité de la lumière.	Relier l'intensité à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique. Citer l'ordre de grandeur du temps de réponse de quelques récepteurs de lumière. **Mettre en œuvre des expériences utilisant un capteur photographique numérique.**

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », la formule de Fresnel, admise en classe de première année, est démontrée. L'étude de la superposition de N ondes cohérentes ne doit pas donner lieu à des développements calculatoires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition de deux ondes incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.
Superposition de deux ondes monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel. Facteur de contraste.	Citer les principales conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse (ondes quasi synchrones, déphasage constant dans le temps ou très lentement variable). Établir et utiliser la formule de Fresnel. Associer un bon contraste à des ondes d'intensités voisines.
Superposition de N ondes monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique.	Établir la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à l'expression de la différence de marche entre deux ondes issues de motifs consécutifs. Établir, par le calcul, la demi-largeur $2\pi/N$ des pics principaux de la courbe d'intensité en fonction du déphasage. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un phénomène d'interférences à N ondes.**

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young** », les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'Young peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	
Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source ponctuelle à distance finie et observation à grande distance. Champ d'interférences. Ordre d'interférences.	Définir, exprimer et utiliser l'interfrange et l'ordre d'interférences. Justifier que les franges ne sont pas localisées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position du point d'observation ; franges d'interférences.	Interpréter la forme des franges observées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position d'un point source. Perte de contraste par élargissement angulaire de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférence.
Variations de l'ordre d'interférence avec la longueur d'onde. Perte de contraste par élargissement spectral de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférence.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue** », l'étude de l'interféromètre de Michelson en lame d'air permet de confronter théorie et expérience. L'étude de l'interféromètre de Michelson en coin d'air est abordée de manière exclusivement expérimentale. Pour la modélisation d'un interféromètre de Michelson, on suppose la séparatrice infiniment mince.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue	
Interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue. Localisation (admise) des franges.	Citer les conditions d'éclairage et d'observation en lame d'air et en coin d'air.
Lame d'air : franges d'égale inclinaison.	Établir et utiliser l'expression de la différence de marche en fonction de l'épaisseur de la lame d'air équivalente et de l'angle d'incidence des rayons. **Régler un interféromètre de Michelson pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole proposé.** **Mettre en œuvre un protocole pour accéder au profil spectral d'une raie ou d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**
Coin d'air : franges d'égale épaisseur.	Utiliser l'expression admise de la différence de marche en fonction de l'épaisseur. **Caractériser la géométrie d'un objet ou l'indice d'un milieu à l'aide d'un interféromètre de Michelson.** **Interpréter qualitativement les observations en lumière blanche.**

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

4. Électromagnétisme

Le programme d'électromagnétisme de la classe de MP s'inscrit dans le prolongement du thème « **Ondes et signaux** » du programme de MPSI. Il s'agit pour les étudiants de découvrir les lois locales et intégrales qui gouvernent les champs électrique et magnétique et les phénomènes que ces lois permettent de modéliser, notamment dans le domaine des ondes électromagnétiques.
L'étude des champs électrostatique et magnétostatique est présentée en deux parties distinctes ; l'enseignant est libre, s'il le souhaite, de procéder à une présentation unifiée de la notion de champ statique. Pour les calculs de champs, l'accent est mis sur les situations à haut degré de symétrie qui permettent l'utilisation efficace des propriétés de flux ou de circulation. Les équations locales des champs statiques sont introduites comme cas particuliers des équations de Maxwell.
La loi de Biot et Savart, les notions de potentiel vecteur et d'angle solide ne relèvent pas du programme.
Les relations de passage relatives au champ électromagnétique peuvent être exploitées mais doivent être systématiquement rappelées.

La partie « **Électrostatique** » constitue un approfondissement des lois quantitatives qui régissent le champ électrostatique. Les notions abordées sont donc centrées sur l'essentiel : distributions de charges, champ et potentiel. Pour le champ électrostatique et le potentiel, on se limite aux expressions dans le cas de charges ponctuelles.
L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie ; ce dernier est admis.
Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées.
Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme.
Une approche énergétique est conduite dans un cas simple : une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Le dipôle est traité, l'accent est mis sur les effets qualitatifs.
Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs électrostatiques.
Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique.	Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Relier les densités de charges de deux types de distributions modélisant une même situation. Déterminer la charge totale d'une distribution continue dans des situations simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.

Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Opérateur gradient.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Citer l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes. Déterminer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Déterminer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans des cas simples.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Identifier les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss.
Systèmes modélisés par une sphère, un cylindre infini ou un plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et énoncer qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Étude du condensateur plan modélisé comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	Établir et citer l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, tracer quelques lignes de champ pour une distribution donnée.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notion de dipôle électrostatique, moment dipolaire.	Exprimer le moment dipolaire d'un doublet de charges. Évaluer des ordres de grandeur dans le domaine microscopique.
Champ et potentiel créés par un dipôle électrostatique.	Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles d'un dipôle électrostatique. Établir et exploiter les expressions du champ et du potentiel créés par un doublet de charges dans l'approximation dipolaire.
Dipôle électrostatique placé dans un champ électrostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur. Établir et exploiter les expressions des actions mécaniques subies par un doublet de charges dans un champ électrostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.
Analogies avec la gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss de la gravitation.

La partie « **Magnétostatique** » s'appuie sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de la classe de MPSI. Les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue.
Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.
L'étude des propriétés des dipôles magnétiques, déjà abordée en classe de MPSI est ici complétée notamment en ce qui concerne les actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique extérieur. On peut, sur ce thème, souligner les analogies avec l'électrostatique.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.2. Magnétostatique	
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumique et linéique.	Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique. Utiliser une méthode de superposition. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini.	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution
Notion de dipôle magnétique. Moment magnétique.	Exprimer le moment magnétique d'une boucle de courant plane. Évaluer des ordres de grandeur dans les domaines macroscopique et microscopique.
Champ créé par un dipôle magnétique.	Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ d'un dipôle magnétique. Exploiter l'expression fournie du champ créé par un dipôle magnétique.
Dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle passif placé dans un champ magnétostatique extérieur. Exploiter les expressions fournies des actions mécaniques subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.

Dans la partie « **Équations de Maxwell** » une vision unifiée des lois de l'électromagnétisme est présentée. Elle conduit à une première approche quantitative du phénomène de propagation et permet également de revenir sur les lois de l'induction étudiées en première année de MPSI.
Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.3. Équations de Maxwell	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Associer qualitativement le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de la conservation de la charge.
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. Exprimer par analogie les équations de Poisson et de Laplace dans le cas de la gravitation.

Dans la partie « **Énergie du champ électromagnétique** », aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.4. Énergie du champ électromagnétique	
Force électromagnétique volumique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; puissance volumique dissipée par effet Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Énergie électromagnétique volumique. Vecteur de Poynting. Bilan d'énergie.	Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (flux solaire, laser…). Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant fournie.

La partie « **Propagation et rayonnement** » est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.
Si le modèle de l'onde plane est présenté dans le cadre de l'espace vide, les études des ondes électromagnétiques dans un plasma ainsi que dans un milieu ohmique permettent d'illustrer l'importance des couplages entre les champs, les charges et les courants. Elles sont également l'occasion d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

abordant, par exemple, l'effet de peau, le phénomène de dispersion, les notions de vitesse de groupe et de phase, de fréquence de coupure ou encore d'onde évanescente.
La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait permet d'aborder la notion d'onde stationnaire. L'importance des conditions aux limites imposées sur la quantification des solutions est soulignée. La notion de densité de courant surfacique est introduite mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.
L'étude du rayonnement dipolaire repose sur l'analyse et l'exploitation des expressions des champs, qui sont admises. Elle est l'occasion d'étudier une modélisation du phénomène de diffusion d'une onde électromagnétique par un atome et d'en analyser les conséquences.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5. Propagation et rayonnement	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique. Relation de dispersion.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Déterminer la relation de dispersion. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ou circulairement.	Reconnaître une onde polarisée rectilignement ou circulairement. **Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.**
Onde plane transverse électrique monochromatique dans un plasma dilué. Conductivité complexe du milieu. Pulsation de coupure. Ondes évanescentes.	Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion. Décrire le phénomène de dispersion. Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère. Distinguer qualitativement les ondes évanescentes et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.
Vitesse de phase, vitesse de groupe. Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu linéaire faiblement dispersif.	Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau.	Établir et interpréter l'expression de la longueur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. **Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.**
Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement. Puissance rayonnée.	Justifier l'intérêt du modèle du dipôle oscillant et citer des exemples dans différents domaines. Formuler et commenter les approximations reliant les trois échelles de longueur pertinentes. Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné, les expressions des champs étant fournies, en utilisant des arguments généraux : symétrie, conservation de l'énergie et analyse dimensionnelle. Effectuer un bilan énergétique, les expressions des champs étant fournies. Représenter l'indicatrice de rayonnement. **Détecter une onde électromagnétique rayonnée.**
Diffusion d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement par une molécule dans cadre du modèle de la charge élastiquement liée. Structure de l'onde diffusée. Puissance diffusée en fonction de la fréquence. Résonance. Domaine de Rayleigh.	Déterminer les caractéristiques du dipôle induit en régime établi, par l'action de l'onde incidente sur la molécule. Identifier les domaines de résonances et de Rayleigh. Citer des illustrations de la diffusion d'une onde électromagnétique par un milieu.

5. Thermodynamique

Le programme de thermodynamique de la classe de MP s'inscrit dans le prolongement de celui de MPSI. Les principes de la thermodynamique sont désormais écrits sous forme infinitésimale $dU+dE = \delta W+\delta Q$ et $dS = \delta S_e + \delta S_c$. Le premier principe écrit sous forme infinitésimale est réinvesti dans l'étude des transferts thermiques.

La partie intitulée « **Principes de la thermodynamique** » est principalement consacrée à l'étude des systèmes ouverts limitée au cas d'un écoulement unidimensionnel.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Principes de la thermodynamique	
Formulation des principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire.	Utiliser avec rigueur les notations *d* et δ en leur attachant une signification.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Premier et deuxième principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire, dans le seul cas d'un écoulement unidimensionnel dans la section d'entrée et la section de sortie.	Établir les relations $\Delta h+\Delta e = w_u+q$ et $\Delta s = s_e+s_c$ et les utiliser pour étudier des machines thermiques réelles à l'aide du diagramme (P,h).

Dans la partie « **Transferts thermiques** », l'établissement de l'équation de la diffusion thermique est limitée au cas des solides ; il est possible d'utiliser les résultats établis dans d'autres situations, notamment dans le cas de l'étude des fluides, en affirmant la généralisation des équations obtenues dans le cas des solides. Les mises en équations locales sont faites exclusivement sur des géométries où une seule variable d'espace intervient. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle. Enfin, aucune connaissance spécifique sur les solutions d'une équation de diffusion ne figure au programme.
La loi de Newton à l'interface entre un solide et un fluide est introduite.

5.2. Transferts thermiques	
Conduction, convection et rayonnement.	Identifier un mode de transfert thermique. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.**
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique.	Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.
Premier principe de la thermodynamique.	Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.
Loi de Fourier.	Interpréter et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. **Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.**
Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur Laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Régime stationnaire. Résistance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.
Coefficient de transfert thermique de surface ; loi de Newton.	Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.

6. Physique quantique

Cette partie s'inscrit dans le prolongement du programme de la classe de MPSI. Il s'agit cependant de dépasser l'approche descriptive et qualitative et de donner aux étudiants leurs premiers outils quantitatifs d'analyse. Le cœur de cet enseignement est construit sur la mécanique ondulatoire de Schrödinger et propose des résolutions d'exemples simples mais fondamentaux pour la bonne compréhension de problèmes plus complexes : particule dans une marche de potentiel et effet tunnel, particule dans un puits de potentiel infini et quantification de l'énergie d'une particule confinée. On se limite à l'introduction heuristique de la dualité onde-particule et de la densité de courant de probabilité pour une particule libre sans développer la notion de paquet d'ondes.
L'accent doit être mis sur l'interprétation et l'exploitation des résultats et non pas sur les calculs, non exigibles pour l'exemple plus délicat de la barrière de potentiel. Le professeur peut au contraire, s'il le souhaite, proposer des analyses de graphes, des exploitations de formules analytiques fournies, des estimations numériques, des simulations… afin d'aborder des modélisations plus réalistes.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
6.1. Fonction d'onde et équation de Schrödinger	
Fonction d'onde ψ d'une particule sans spin et densité de probabilité de présence.	Interpréter en termes de probabilité l'amplitude d'une onde associée à une particule.
Équation de Schrödinger à une dimension dans un potentiel V(x).	Utiliser le caractère linéaire de l'équation (principe de superposition).
États stationnaires de l'équation de Schrödinger.	Procéder à la séparation des variables temps et espace. Distinguer l'onde associée à un état stationnaire en mécanique quantique d'une onde stationnaire au sens usuel de la physique des ondes. Relier l'énergie de la particule à l'évolution temporelle de sa fonction d'onde et faire le lien avec la relation de Planck-Einstein. Identifier le terme associé à l'énergie cinétique.
6.2. Particule libre	
Fonction d'onde d'une particule libre non localisée.	Établir les solutions. Interpréter la difficulté de normalisation de cette fonction d'onde.
Relation de de Broglie.	Relier l'énergie de la particule et le vecteur d'onde de l'onde plane associée.

Inégalité d'Heisenberg spatiale et paquet d'ondes.	Expliquer, en s'appuyant sur l'inégalité d'Heisenberg spatiale, que la localisation de la particule peut s'obtenir par superposition d'ondes planes.
Densité de courant de probabilité associée à une particule libre.	Utiliser l'expression admise du courant de probabilité associé à une particule libre ; l'interpréter comme un produit densité*vitesse.
6.3. États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux	
États stationnaires d'une particule dans le cas d'une marche de potentiel. Cas E > V : probabilité de transmission et de réflexion. Cas E < V : évanescence.	Citer des exemples physiques illustrant cette problématique. Exploiter les conditions de continuité (admises) relatives à la fonction d'onde. Établir la solution dans le cas d'une particule incidente sur une marche de potentiel. Expliquer les différences de comportement par rapport à une particule classique Déterminer les coefficients de transmission et de réflexion en utilisant les courants de probabilités. Reconnaître l'existence d'une onde évanescente et la caractériser.
Barrière de potentiel et effet tunnel.	Décrire qualitativement l'influence de la hauteur ou de largeur de la barrière de potentiel sur le coefficient de transmission. Exploiter un coefficient de transmission fourni. Citer des applications.
États stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini.	Établir les solutions et les niveaux d'énergie de la particule confinée. Identifier des analogies avec d'autres domaines de la physique.
Énergie de confinement.	Estimer l'énergie d'une particule confinée dans son état fondamental pour un puits non rectangulaire. Associer l'analyse à l'inégalité d'Heisenberg.
6.4. États non stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini	
Combinaison linéaire d'états stationnaires.	Expliquer qu'une superposition de deux états stationnaires engendre une évolution au cours du temps de l'état de la particule. Établir l'expression de la densité de probabilité de présence de la particule dans le cas d'une superposition de deux états stationnaires ; interpréter le résultat.

7. Éléments de thermodynamique statistique

L'objectif de cette partie est de relier certaines propriétés macroscopiques d'un système constitué d'un grand nombre de particules avec celles des constituants microscopiques. Le facteur de Boltzmann est introduit de manière inductive à partir du modèle d'atmosphère isotherme. L'étude des systèmes à spectre discret d'énergies est l'occasion de montrer, qu'à température donnée l'énergie fluctue et que les fluctuations relatives diminuent avec la taille du système. L'étude des systèmes à deux niveaux, conduite de manière plus exhaustive, permet une analyse plus fine des phénomènes.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

L'étude de l'énergie d'un ensemble de particules libres dans une boîte unidimensionnelle à une température donnée établit un lien entre la physique quantique et les propriétés macroscopiques de la matière
Le théorème d'équipartition de l'énergie est l'occasion de procéder à une évaluation des capacités thermiques des gaz et des solides.

Notions et contenus	Capacités exigibles
7.1. Facteur de Boltzmann	
Modèle de l'atmosphère isotherme.	Établir la variation de la pression avec l'altitude dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme.
Poids de Boltzmann d'une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat.	Interpréter la loi du nivellement barométrique avec le poids de Boltzmann. Identifier un facteur de Boltzmann. Comparer kT à des écarts d'énergie et estimer les conséquences d'une variation de température.
7.2. Systèmes à spectre discret d'énergies	
Probabilité d'occupation d'un état d'énergie non dégénéré par une particule indépendante.	Exprimer la probabilité d'occupation d'un état d'énergie en utilisant la condition de normalisation. Exploiter un rapport de probabilités entre deux états.
Énergie moyenne et écart quadratique moyen.	Exprimer sous forme d'une somme sur ses états l'énergie moyenne et l'écart-quadratique énergétique d'un système.
Cas d'un système à N particules indépendantes.	Expliquer pourquoi les fluctuations relatives d'énergie régressent quand la taille du système augmente et associer cette régression au caractère quasi-certain des grandeurs thermodynamiques.
Système à deux niveaux non dégénérés d'énergies $\pm\varepsilon$.	Citer des exemples de systèmes modélisables par un système à deux niveaux. Déterminer l'énergie moyenne et la capacité thermique d'un système à deux niveaux. Interpréter l'évolution de l'énergie moyenne avec la température, notamment les limites basse et haute température. Relier les fluctuations d'énergies à la capacité thermique.
Énergie moyenne d'équilibre à la température T d'un ensemble de N particules dans un puits de potentiel infini.	Déterminer l'énergie moyenne d'un ensemble de particules à une température donnée, dans la limite où l'énergie de confinement est faible devant l'énergie d'agitation thermique. Relier l'expression de l'énergie moyenne en fonction de la température au théorème de l'équipartition de l'énergie.
7.3. Capacités thermiques classiques des gaz et des solides	
Théorème d'équipartition pour un degré de liberté énergétique indépendant quadratique.	Exploiter la contribution kT/2 par degré quadratique à l'énergie moyenne.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Capacité thermique molaire des gaz classiques dilués monoatomiques et diatomiques. Capacité thermique molaire des solides dans le modèle d'Einstein classique : loi de Dulong et Petit.	Dénombrer des degrés de libertés énergétiques quadratiques indépendants et en déduire la capacité thermique molaire d'un système.

8. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques

Les transformations chimiques de la matière ont été abordées dès le début de la classe de MPSI ; le critère d'évolution spontanée d'un système chimique en transformation y a été présenté sans être démontré. Ce dernier a été remobilisé lors de l'étude des transformations chimiques en solution aqueuse.
Le but de cette partie est d'une part d'aborder les transferts thermiques et d'autre part d'établir puis exploiter le critère d'évolution spontanée d'un système engagé dans une transformation physico-chimique, ce qui nécessite l'introduction de la fonction enthalpie libre G et du potentiel chimique.

Dans la partie « **Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », l'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif aux transformation physiques du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.
Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, pouvoirs calorifiques des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
8.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
État standard. Enthalpie standard de réaction. Loi de Hess. Enthalpie standard de formation, état standard de référence d'un élément.	Déterminer l'enthalpie standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques. Associer le signe de l'enthalpie standard de réaction au caractère endothermique ou exothermique de la réaction.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Effets thermiques pour une transformation monobare : - transfert thermique associé à la transformation chimique en réacteur monobare, isotherme ; - variation de température en réacteur adiabatique, monobare.	Prévoir, à partir de données thermodynamiques, le sens et une estimation de la valeur du transfert thermique entre un système, siège d'une transformation physico-chimique et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation chimique supposée monobare et réalisée dans un réacteur adiabatique. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'évolution temporelle de la température pour un système siège d'une transformation adiabatique modélisée par une seule réaction chimique dont les caractéristiques cinétiques et l'enthalpie standard de réaction sont données. **Déterminer une enthalpie standard de réaction.**

Dans la partie « **Second principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », on adopte pour les potentiels chimiques une expression générale : $\mu_i = \mu_{i,réf} + RT\ \ln(a_i)$ qui fait référence aux activités a_i introduites en première année. L'établissement de cette expression est hors programme. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'un constituant en phase condensée pure n'est pas abordée. On se limite aux cas d'une espèce chimique pure, d'une espèce en solution aqueuse très diluée et d'une espèce en mélange de gaz parfaits avec référence à l'état standard.
Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température. Les grandeurs standard de réaction permettent la détermination de la valeur, à une température donnée, de la constante thermodynamique d'équilibre K° caractéristique d'une réaction, valeur qui était systématiquement fournie en première année. C'est ainsi l'occasion de revenir sur la détermination de la composition d'un système physico-chimique en fin d'évolution.
La notion d'affinité chimique n'est pas utilisée, le sens d'évolution spontanée d'un système hors d'équilibre, à température et pression fixées, est déterminé par le signe de l'enthalpie libre de réaction Δ_rG.
Enfin, l'étude de l'influence de la modification d'un paramètre (pression, température ou composition) sur un système chimique permet d'aborder la problématique de l'optimisation des conditions opératoires d'un procédé chimique.
Les illustrations et applications sont choisis dans le domaine industriel, dans la vie courante et au niveau du laboratoire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
8.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
Potentiel chimique ; enthalpie libre d'un système chimique. Activité.	Définir le potentiel chimique à l'aide de la fonction enthalpie libre et donner l'expression (admise) du potentiel chimique d'un constituant en fonction de son activité. Exprimer l'enthalpie libre d'un système chimique en fonction des potentiels chimiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Enthalpie de réaction, entropie de réaction, enthalpie libre de réaction et grandeurs standard associées. Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction ; évolution d'un système chimique.	Justifier qualitativement ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction. Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à pression et température fixées. Prévoir le sens d'évolution à pression et température fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Déterminer les grandeurs standard de réaction à partir des tables de données thermodynamiques et de la loi de Hess. Déterminer les grandeurs standard de réaction d'une réaction dont l'équation est combinaison linéaire d'autres équations de réaction.
Constante thermodynamique d'équilibre ; relation de Van 't Hoff.	Citer et exploiter la relation de Van 't Hoff. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre à une température quelconque. **Déterminer l'évolution de la valeur d'une constante thermodynamique d'équilibre en fonction de la température.**
État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale.	Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique.
Optimisation thermodynamique d'un procédé chimique : - par modification de la valeur de K° ; - par modification de la valeur du quotient de réaction.	Identifier les paramètres d'influence et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.

9. Aspects thermodynamique et cinétique de l'électrochimie.

Les aspects thermodynamiques et cinétiques des réactions d'oxydo-réduction sont appliqués notamment à la corrosion d'une part et aux dispositifs électrochimiques que sont les piles et les accumulateurs d'autre part. L'illustration des notions gagne à s'appuyer sur des applications concrètes comme par exemple la mise en œuvre de capteurs électrochimiques dans l'analyse de l'eau, de l'air ou d'effluents.
L'approche de l'électrochimie proposée ici privilégie les raisonnements qualitatifs et les aspects expérimentaux, plutôt que les développements théoriques et formels.

La partie « **Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction** » se fonde sur les acquis de première année relatifs à l'étude des réactions d'oxydo-réduction et des piles, ainsi que sur la partie de thermodynamique chimique de seconde année pour relier les grandeurs thermodynamiques aux potentiels.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
9.1. Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction	
Relation entre enthalpie libre de réaction et potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.	Citer et exploiter la relation entre l'enthalpie libre de réaction et les potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.
Relation entre enthalpie libre standard de réaction et potentiels standard des couples impliqués.	Déterminer l'enthalpie libre standard d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. Déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple d'oxydo-réduction à partir de données thermodynamiques.

La partie « **Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel** » se fonde sur les acquis de cinétique chimique de première année et les prolongent par le tracé et l'exploitation de courbes courant-potentiel
Les courbes courant-potentiel, dont le tracé est proposé en capacité expérimentale, sont un outil essentiel dans la compréhension et la modélisation des systèmes électrochimiques.
L'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre est appelé surpotentiel plutôt que surtension pour des raisons pédagogiques, en cohérence avec le vocabulaire anglo-saxon correspondant.

Notions et contenus	Capacités exigibles
9.2. Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel	
Courbes courant-potentiel sur une électrode en régime stationnaire : - surpotentiel ; - systèmes rapides et systèmes lents ; - nature de l'électrode ; - courant de diffusion limite ; - vagues successives ; - domaine d'inertie électrochimique du solvant.	Décrire le montage à trois électrodes permettant de tracer des courbes courant-potentiel. Relier vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Identifier le caractère lent ou rapide d'un système à partir des courbes courant-potentiel. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. Relier qualitativement ou quantitativement, à partir de relevés expérimentaux, l'intensité du courant de diffusion limite à la concentration du réactif et à la surface immergée de l'électrode. Tracer l'allure de courbes courant-potentiel de branches d'oxydation ou de réduction à partir de données fournies, de potentiels standard, concentrations et surpotentiels. **Tracer et exploiter des courbes courant-potentiel.**

La partie « **Stockage et conversion d'énergie dans des dispositifs électrochimiques** » s'appuie sur les courbes courant-potentiel pour étudier le fonctionnement des piles et leur recharge, ainsi que les électrolyseurs. Ces courbes permettent en effet de déterminer différentes caractéristiques : réactions aux électrodes, tension à vide, tension à imposer pour une recharge, etc.

Notions et contenus	Capacités exigibles
9.3. Stockage et conversion d'énergie chimique dans des dispositifs électrochimiques	
Conversion d'énergie chimique en énergie électrique : fonctionnement des piles. Transformations spontanées et réaction modélisant le fonctionnement d'une pile électrochimique.	 Établir l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique. Relier la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de la réaction modélisant son fonctionnement. Déterminer la capacité électrique d'une pile.
Courbes courant-potentiel et fonctionnement d'une pile électrochimique.	Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'une pile électrochimique et tracer sa caractéristique. Citer les paramètres influençant la résistance interne d'une pile électrochimique.
Conversion d'énergie électrique en énergie chimique. Transformations forcées lors d'une électrolyse et de la recharge d'un accumulateur.	 Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'un électrolyseur et prévoir la valeur de la tension minimale à imposer. Exploiter les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes (purification de la solution électrolytique, choix des électrodes) dans la recharge d'un accumulateur. Déterminer la masse de produit formé pour une durée et des conditions données d'électrolyse. Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié.
Stockage et conversion d'énergie chimique.	**Étudier le fonctionnement d'une pile ou d'un électrolyseur pour effectuer des bilans de matière et des bilans électriques.**

La lutte contre la corrosion est un enjeu économique et la compréhension des phénomènes de corrosion et des facteurs influençant cette corrosion est essentielle pour effectuer des choix de méthodes de protection. La partie « **Corrosion humide ou électrochimique** » exploite les courbes courant-potentiel pour interpréter les phénomènes de corrosion, de protection et de passivation. On se limite à la corrosion uniforme et à la corrosion galvanique de deux métaux en contact. Les tracés de diagrammes de Tafel ou d'Evans sont hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
9.4. Corrosion humide ou électrochimique	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Corrosion uniforme en milieu acide ou en milieu neutre oxygéné : potentiel de corrosion, courant de corrosion. Corrosion d’un système de deux métaux en contact.	Positionner un potentiel de corrosion sur un tracé de courbes courant-potentiel. Interpréter le phénomène de corrosion uniforme d’un métal ou de deux métaux en contact en utilisant des courbes courant-potentiel ou d’autres données expérimentales, thermodynamiques et cinétiques. Citer des facteurs favorisant la corrosion.
Protection contre la corrosion : - revêtement ; - anode sacrificielle ; - protection électrochimique par courant imposé.	Exploiter des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement : - la qualité de la protection par un revêtement métallique ; - le fonctionnement d’une anode sacrificielle.
Passivation.	Interpréter le phénomène de passivation sur une courbe courant-potentiel. **Mettre en évidence le phénomène de corrosion et de protection et des facteurs l’influençant.**

Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique-chimie de la classe de MPSI. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l’aide d’une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d’épreuves d’évaluation n’est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s’accompagner d’une aide.

1. Domaine optique

- Polariseur.
- Interféromètre de Michelson motorisé.
- Capteur photographique numérique.
- Spectromètre à fibre optique.

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre.
- Carte d'acquisition dont l'API est publiée.
- Microcontrôleur.
- Émetteur et récepteur dans le domaine des ondes centimétriques.

3. Domaine de la chimie

- Calorimètre.
- Électrode de référence.
- Électrolyseur et électrodes.

Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de MP sont d’une part ceux qui figurent dans l’annexe 2 du programme de la classe de MPSI et d’autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'outil « gradient » abordé en première année, en introduisant de nouveaux opérateurs : seules les expressions des opérateurs en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en MPSI et réutilisée en classe de MP. On étend la décomposition d'un signal périodique comme somme de ses harmoniques à l'expression d'un signal non périodique sous forme d'une intégrale (synthèse spectrale) ; aucun résultat n'est exigible. On souligne en revanche la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent est mis sur le rôle des conditions aux limites.

Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles sont mobilisées principalement dans le cours de thermodynamique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse vectorielle	
Gradient.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$.
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ ou à $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)$.	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\mathbf{k}$.
2. Analyse de Fourier	
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Synthèse spectrale d'un signal non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert, équation de Schrödinger.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
4. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle. Théorème de Schwarz.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclut l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de première année de la classe de MPSI.

Domaines numériques	Capacités exigibles
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Enseignements secondaire et supérieur

Classes préparatoires scientifiques

Objectifs de formation et programme des classes préparatoires de seconde année de physique et chimie (PC) et de physique et chimie* (PC*) : modification

NOR : ESRS2111703A
arrêté du 13-7-2021 - JO du 5-8-2021
MESRI - DGESIP A1-2 - MENJS - DGESCO - MOM

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du Cneser du 8-6-2021 ; avis du CSE du 17-6-2021 ; avis de la ministre des Armées des 1er, 2, 5 et 6-7-2021

Article 1 - Les programmes de mathématiques, de physique et de chimie de seconde année de la classe préparatoire scientifique physique et chimie (PC), annexés à l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, sont remplacés par ceux figurant respectivement aux annexes 1, 2 et 3 du présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023.

Article 3 - I. - L'article 3 de l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé est remplacé par les dispositions suivantes :
« Article 3 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis et Futuna et en Nouvelle-Calédonie. »
II. - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis et Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 4 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 13 juillet 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer, et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle, et par délégation,
La cheffe du service de la stratégie des formations et de la vie étudiante, adjointe à la directrice générale,
Isabelle Prat

Annexes

Programmes des classes préparatoires de seconde année de physique et chimie (PC) et de physique et chimie (PC*)*

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et chimie (PC)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classe préparatoire PC
Programme de mathématiques

Table des matières

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :
- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, le calcul différentiel et l'optimisation exploitent les endomorphismes autoadjoints ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend deux sections. La première prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et combine les points de vue géométrique (éléments propres), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matriciel pour aboutir à une solide étude de la réduction : diagonalisation, trigonalisation. La deuxième étudie, dans le cadre euclidien, les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints (théorème spectral), et introduit les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation.

La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, théorème des bornes atteintes pour les fonctions continues sur les fermés bornés, continuité des applications linéaires et polynomiales.
Après quelques compléments sur les séries numériques, la section sur les suites et séries de fonctions étudie divers modes de convergence et établit des résultats de régularité pour les limites de suites ou les sommes de séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.
Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires, en admettant le théorème de Cauchy, et pour les probabilités au travers des fonctions génératrices.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable.
Les théorèmes sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables en appui des notions générales de la théorie des probabilités, afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants. L'inégalité qui la sous-tend précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

Le programme permet aussi, en liaison avec la réduction, de traiter des exemples d'équations ou de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Après quelques éléments sur la dérivabilité des fonctions vectorielles, la section sur les fonctions de plusieurs variables est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie. Elle s'achève par une étude au second ordre des extremums qui s'appuie sur les matrices symétriques.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E=\bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p}\dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité, trace d'une transposée.	
Relation $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.	
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Relation $(PQ)(u)=P(u)\circ Q(u)$.
Polynôme annulateur.	Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.	Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P\in\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;*
- *l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).*

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
c) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.	
e) Trigonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Endomorphismes des espaces euclidiens

Cette section vise les objectifs suivants :

- *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces préhilbertiens réels ;*
- *étudier isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

Pour les applications courantes en dimension trois, on peut au besoin recourir au produit vectoriel, déjà introduit et connu des étudiants dans l'enseignement des sciences physiques notamment.

La notion d'adjoint est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Groupe orthogonal.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ». Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathcal{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.
Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$ et $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\\| \\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	 Convexité des boules.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie.	
Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
g) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Suites et séries de fonctions

A - Compléments sur les séries numériques

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors : $$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.	

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et : $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$	La démonstration est hors programme.
Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

C - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Intervalle ouvert de convergence. Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$. Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
- *compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.
Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et : $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de continuité :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

Théorème de dérivation :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration n'est pas exigible.
En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*
- *les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

A - Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
b) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.	Notation $P(A)$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	

d) Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$. Relation $P(X > k) = (1-p)^k$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

C - Espérance et variance

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$	On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.	X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Variable centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$	
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\Big(f(X)\Big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$	On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Linéarité de l'espérance. Si $\|X\| \leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$$	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\,t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1, 1]$. Continuité de G_X. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$: $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$	Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$: $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Calcul différentiel

A - Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.	
Dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1,\dots,f_p$ à valeurs vectorielles.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.
Dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles. Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle.	

B - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p=2$ ou $p=3$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivée en un point selon un vecteur.	Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1. Différentielle de f en a.	La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω. Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $$\mathrm{d}f(a) : (h_1,\dots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i.$$ Notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de : $$(u_1,\dots,u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)\big).$$	En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $h \in \mathbb{R}^p$, relation $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \langle \nabla f(a), h\rangle$.	Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme.
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \mathrm{o}(\lVert h\rVert^2)$.	La démonstration est hors programme. Expression en termes de produit scalaire.
e) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$	
Extremum local, global. Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique.	
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f : – si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ; – si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.	Adaptation à l'étude d'un maximum local. Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).
	Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et chimie (PC)

Annexe 2
Programme de physique

Programme de physique de la voie PC

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique de la classe de PC est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de PCSI. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de six thèmes : « Optique », « Électronique », « Thermodynamique », « Mécanique », « Électromagnétisme » et « Physique des ondes ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras** dans la colonne « capacités exigibles », se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées, d'une part, au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes et, d'autre part, aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de la classe de PC.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression, celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur.

	- Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	    ○ présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	    ○ rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	    ○ utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés

doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques : la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques (mathématiques, chimie, informatique).

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de PC durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante de PCSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc naturellement au programme de seconde année PC.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de temps et de fréquences	
Mesurer indirectement une fréquence par comparaison avec une fréquence connue voisine, en utilisant une détection synchrone.	Réaliser une détection « synchrone » à l'aide d'un multiplieur et d'un passe-bas simple adapté à la mesure.
Réaliser une analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
2. Électricité	
Générateurs basse fréquence à modulation interne ou externe.	Élaborer un signal électrique analogique modulé en fréquence.
Montages utilisant un amplificateur linéaire intégré (ALI).	Mettre en œuvre divers montages utilisant un ALI, les schémas des montages étant fournis.
3. Optique	
Analyser une lumière complètement polarisée.	Identifier de façon absolue l'axe d'un polariseur par une méthode mettant en œuvre la réflexion vitreuse Identifier les lignes neutres d'une lame quart d'onde ou demi-onde, sans distinction entre axe lent et rapide. Modifier la direction d'une polarisation rectiligne. Obtenir une polarisation circulaire à partir d'une polarisation rectiligne, sans prescription sur le sens de rotation. Mesurer un pouvoir rotatoire naturel.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Étudier la cohérence temporelle d'une source.	Régler un interféromètre de Michelson pour une observation en lame d'air avec une source étendue par une démarche autonome non imposée. Obtenir une estimation semi-quantitative de la longueur de cohérence d'une radiation à l'aide d'un interféromètre de Michelson en lame d'air.
Mesurer une faible différence de longueurs d'onde : doublet spectral, modes d'une diode laser.	Réaliser la mesure d'un faible écart spectral avec un interféromètre de Michelson.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique

L'apprentissage et le respect des règles de sécurité électrique, optique et celles liées à la pression et à la température permettent aux étudiants de prévenir et de minimiser les risques. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.

Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de six thèmes.

1. Optique

1.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses
1.2. Superposition d'ondes lumineuses
1.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young
1.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson

2. Électronique

3. Thermodynamique

3.1. Systèmes ouverts en régime stationnaire
3.2. Diffusion de particules
3.3. Diffusion thermique
3.4. Rayonnement thermique

4. Mécanique

4.1. Changements de référentiel
4.2. Dynamique dans un référentiel non galiléen
4.3. Mécanique des fluides

5. Électromagnétisme

5.1. Sources du champ électromagnétique
5.2. Électrostatique
5.3. Magnétostatique
5.4. Équations de Maxwell

6. Physique des ondes

6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert
6.2. Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels
6.3. Interfaces entre deux milieux
6.4. Introduction à la physique du laser
6.5. Approche ondulatoire de la mécanique quantique

1. Optique

Le programme de la classe de PC s'inscrit dans la continuité de la partie « **Formation des images** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PCSI. Dans une première partie, on introduit les éléments spécifiques à l'émission, la propagation et la détection des ondes lumineuses. Les parties suivantes traitent essentiellement des interférences lumineuses : partant des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle strictement monochromatique, on étudie ensuite l'évolution de la visibilité sous l'effet d'un élargissement spatial et spectral de la source. Le brouillage des franges précédentes sous l'effet d'un élargissement spatial de la source conduit à montrer l'un des avantages de l'interféromètre de Michelson éclairé par une source étendue (franges d'égale inclinaison et franges d'égale épaisseur) en constatant expérimentalement l'existence d'un lieu de localisation des franges. L'objectif de cette partie n'est pas le calcul de la répartition de l'intensité lumineuse modélisant les figures observées : on exploite le plus souvent les variations de l'ordre d'interférences (avec la position du point d'observation, la position du point source et la longueur d'onde) pour interpréter les observations sans expliciter l'intensité de la lumière.

La partie « **Modèle scalaire des ondes lumineuses** » introduit les outils nécessaires à l'étude des phénomènes ondulatoires dans le domaine de l'optique. La réponse des récepteurs est supposée proportionnelle à la moyenne du carré du champ électrique de l'onde. Le programme utilise uniquement le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut employer indifféremment les termes « intensité » et « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau de formation. Le théorème de Malus (orthogonalité des rayons lumineux et des surfaces d'ondes dans l'approximation de l'optique géométrique) est admis. Dans le cadre de l'optique, on qualifie une onde de plane ou sphérique par référence à la forme des surfaces d'ondes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses	
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique. Vibration lumineuse.	Associer la grandeur scalaire de l'optique à une composante d'un champ électrique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Chemin optique. Déphasage dû à la propagation.	Exprimer le retard de phase en un point en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique.
Surfaces d'ondes. Théorème de Malus. Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Utiliser l'égalité des chemins optiques sur les rayons d'un point objet à son image. Associer une description de la formation des images en termes de rayons lumineux et en termes de surfaces d'onde.
Modèle d'émission. Largeur spectrale. Cohérence temporelle.	 Classer différentes sources lumineuses (lampe spectrale basse pression, laser, source de lumière blanche…) en fonction du temps de cohérence de leurs diverses radiations. Citer quelques ordres de grandeur des longueurs de cohérence temporelle associées à différentes sources. Relier, en ordre de grandeur, le temps de cohérence et la largeur spectrale de la radiation considérée.
Réception d'une onde lumineuse. Récepteurs. Intensité lumineuse.	 Comparer le temps de réponse d'un récepteur usuel (œil, photodiode, capteur CCD) aux temps caractéristiques des vibrations lumineuses. Relier l'intensité lumineuse à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique. **Mettre en œuvre un capteur optique.**

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », le professeur est invité à s'appuyer sur des situations concrètes, des illustrations expérimentales et des simulations afin de donner du sens aux différentes notions présentées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques non synchrones ou incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.
Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel.	Établir la formule de Fresnel. Identifier une situation de cohérence entre deux ondes et utiliser la formule de Fresnel.
Contraste.	Associer un bon contraste à des ondes d'intensités voisines.
Superposition de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont	Expliquer qualitativement l'influence de N sur l'intensité et la finesse des franges brillantes observées.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

en progression arithmétique dans le cas N >> 1.	Établir, par le calcul, la condition d'interférences constructives et la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes. Établir et utiliser la formule indiquant la direction des maxima d'intensité derrière un réseau de fentes rectilignes parallèles.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young** »**,** les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. En revanche, les fentes d'Young sont abordées de manière exclusivement expérimentale. Aucun autre interféromètre à division du front d'onde n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	
Dispositif-modèle des trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif (source ponctuelle à grande distance finie ; observation à grande distance finie). Champ d'interférences. Ordre d'interférences.	Définir, déterminer et utiliser l'ordre d'interférences.
Franges d'interférences.	Justifier la forme des franges observées sur un écran éloigné parallèle au plan contenant les trous d'Young.
Du dispositif-modèle au dispositif réel. Fentes d'Young. Montage de Fraunhofer.	Identifier l'effet de la diffraction sur la figure observée. Expliquer l'intérêt pratique du dispositif des fentes d'Young comparativement aux trous d'Young. Exprimer l'ordre d'interférences sur l'écran dans le cas d'un dispositif des fentes d'Young utilisé en configuration de Fraunhofer.
Perte de contraste par élargissement spatial de la source.	Utiliser un critère semi-quantitatif de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférences pour interpréter des observations expérimentales.
Perte de contraste par élargissement spectral de la source.	Utiliser un critère semi-quantitatif de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférences pour interpréter des observations expérimentales. Relier la longueur de cohérence temporelle, la largeur spectrale et la longueur d'onde en ordres de grandeur.
Observations en lumière blanche (blanc d'ordre supérieur, spectre cannelé).	Déterminer les longueurs d'ondes des cannelures.

Dans le prolongement de la partie précédente, la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson** » vise à mettre en lumière l'intérêt des dispositifs interférentiels par division d'amplitude, en s'appuyant sur l’exemple de l’interféromètre de Michelson. L’accent est ainsi mis sur l’importance expérimentale de ces dispositifs, notamment dans le domaine de la métrologie. Lors de la modélisation de l’interféromètre de Michelson, la séparatrice est supposée d’épaisseur négligeable.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d’amplitude : interféromètre de Michelson	
Interféromètre de Michelson équivalent à une lame d’air éclairée par une source spatialement étendue. Localisation des franges. Franges d’égale inclinaison.	 Justifier les conditions d’observation des franges d’égale inclinaison, le lieu de localisation des franges étant admis. Établir et utiliser l’expression de l’ordre d’interférences en fonction de l’épaisseur de la lame, l’angle d’incidence et la longueur d’onde. **Décrire et mettre en œuvre les conditions d’éclairage et d’observation adaptées à l’utilisation d’un interféromètre de Michelson en lame d’air.** **Mesurer l’écart en longueur d’onde d’un doublet et la longueur de cohérence d’une radiation.** **Interpréter des observations faites en lumière blanche avec l’interféromètre de Michelson en configuration lame d’air.**
Interféromètre de Michelson équivalent à un coin d’air éclairé par une source spatialement étendue. Localisation des franges. Franges d’égale épaisseur.	 Justifier les conditions d’observation des franges d’égale épaisseur, le lieu de localisation des franges étant admis. Utiliser l’expression donnée de la différence de marche en fonction de l’épaisseur pour exprimer l’ordre d’interférences. **Décrire et mettre en œuvre les conditions d’éclairage et d’observation adaptées à l’utilisation d’un interféromètre de Michelson en coin d’air.** **Caractériser la géométrie d’un objet ou l’indice d’un milieu à l’aide d’un interféromètre de Michelson.** **Interpréter des observations faites en lumière blanche avec l’interféromètre**

© Ministère de l’enseignement supérieur, de la recherche et de l’innovation, 2021

	de Michelson en configuration coin d'air.

2. Électronique

La partie « **Production, acquisition et traitement d'un signal électrique** » est abordée exclusivement de manière expérimentale et prolonge sur ce thème le programme de première année de la classe de PCSI. De par leur large champ d'applications, les capacités identifiées dans cette partie peuvent être reliées de façon fructueuse à d'autres capacités expérimentales du programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Production, acquisition et traitement d'un signal électrique. Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	**Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et analyser les spectres des signaux générés.**
Échantillonnage.	**Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.**
Condition de Nyquist-Shannon.	**Utiliser la condition de Nyquist-Shannon.** **Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'une acquisition numérique.**
Détection synchrone.	**Mettre en œuvre un protocole de détection synchrone.**

3. Thermodynamique

Le programme de thermodynamique de la classe de PC s'inscrit dans le prolongement de celui de la classe de PCSI : les principes de la thermodynamique peuvent être désormais écrits sous forme infinitésimale pour un système évoluant entre deux instants infiniment proches, d'une part dans le cadre de l'étude des machines thermiques avec écoulement en régime stationnaire et d'autre part dans le cadre de l'étude de la diffusion thermique. Les expressions des variations infinitésimales des fonctions d'état en fonction des variables d'état doivent être fournies pour les systèmes envisagés.
Ce thème contribue également à asseoir la maîtrise des opérateurs d'analyse vectorielle (gradient, divergence, laplacien) mais le formalisme doit rester au deuxième plan. Les mises en équations locales sont réalisées dans le cas de problèmes ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle, ce qui permet d'aborder des situations plus variées en fournissant les expressions de la divergence et du laplacien.
Au travers des illustrations et des exemples traités, le professeur est invité à sensibiliser les étudiants à certains enjeux sociétaux liés par exemple aux questions d'économies d'énergie et de réchauffement climatique ; ceci est aussi l'occasion d'insister sur la notion de modèle en physique et plus généralement en sciences.

La partie « **Systèmes ouverts en régime stationnaire** » complète la partie « **Machines thermique** » du programme de première année de la classe de PCSI en proposant notamment un bilan d'entropie. La maîtrise des démonstrations par les étudiants et l'application des résultats à des situations concrètes constituent des objectifs de formation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Systèmes ouverts en régime stationnaire	
Premier et deuxième principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire, dans le seul cas d'un écoulement unidimensionnel au niveau de la section d'entrée et de la section de sortie.	Établir les relations $\Delta h + \Delta e = w_u + q$ et $\Delta s = s_e + s_c$ et les utiliser pour étudier des machines thermiques réelles à l'aide de diagrammes thermodynamiques (T,s) et (P,h).

Dans la partie « **Diffusion de particules** », l'accent est mis sur le notion de bilan dans le cas où le phénomène de convection est négligé. Cette partie se termine par un modèle microscopique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.2. Diffusion de particules	
Vecteur densité de flux de particules $\mathbf{j_N}$.	Exprimer le flux de particules traversant une surface orientée en utilisant le vecteur $\mathbf{j_N}$.
Bilans de particules.	Utiliser la notion de flux pour traduire un bilan global de particules. Établir l'équation locale traduisant un bilan de particules dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local de particules dans le cas d'une géométrie quelconque.
Loi de Fick.	Utiliser la loi de Fick. Citer l'ordre de grandeur d'un coefficient de diffusion dans un gaz dans les conditions usuelles.
Régimes stationnaires.	Utiliser, en régime stationnaire, la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de sources internes.
Équation de diffusion en l'absence de sources internes.	Établir l'équation de la diffusion en l'absence de sources internes. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque. Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.

Approche microscopique du phénomène de diffusion.	Mettre en place un modèle probabiliste discret à une dimension de la diffusion (marche au hasard) et évaluer le coefficient de diffusion associé en fonction du libre parcours moyen et de la vitesse quadratique moyenne. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la marche au hasard d'un grand nombre de particules à partir d'un centre et caractériser l'étalement spatial de cet ensemble de particules au cours du temps.

Dans la partie « **Diffusion thermique** », la mise en équations de la diffusion thermique est limitée au cas des solides ; on peut étendre les résultats ainsi établis aux milieux fluides en l'absence de convection en affirmant la généralisation des équations obtenues dans les solides. La loi phénoménologique de Newton à l'interface entre un solide et un fluide peut être utilisée dès lors qu'elle est fournie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Diffusion thermique	
Vecteur densité de flux thermique $\mathbf{j_Q}$	Exprimer le flux thermique à travers une surface orientée en utilisant le vecteur $\mathbf{j_Q}$.
Premier principe de la thermodynamique.	Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local dans le cas d'une géométrie quelconque, éventuellement en présence de sources internes.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, métaux.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux thermique sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Établir l'expression d'une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel. Utiliser les lois d'associations de résistances thermiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Équation de la diffusion thermique.	Établir une équation de diffusion thermique. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque. Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.**

Dans la partie « **Rayonnement thermique** », une étude qualitative du rayonnement du corps noir est proposée sans qu'aucune formule ne soit exigible. Celle-ci permet également d'aborder de manière quantitative l'effet de serre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Rayonnement thermique	
Approche descriptive du rayonnement du corps noir. Loi de Wien, loi de Stefan. Effet de serre. Albédo.	Exploiter les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan. Analyser quantitativement l'effet de serre en s'appuyant sur un bilan énergétique dans le cadre d'un modèle à une couche.

4. Mécanique

Le programme de mécanique de PC s'inscrit dans le prolongement du thème « **Mouvements et interactions** » et de la partie « **Statique des fluides dans un référentiel galiléen** » du thème « **Énergie : conversion et transfert** » du programme de PCSI. Il est constitué de trois parties relevant successivement de la mécanique du point ou des fluides.

Dans la première partie « **Changements de référentiel** », la cinématique des changements de référentiels n'est pas étudiée pour elle-même mais en vue d'applications en dynamique du point ou des fluides.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Changements de référentiel	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre : transformation de Galilée, composition des vitesses.	Relier la transformation de Galilée et la formule de composition des vitesses à la relation de Chasles et au caractère supposé absolu du temps.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un autre : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement.	Exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement, accélération de Coriolis.	Exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. Citer et utiliser l'expression de l'accélération de Coriolis.

Dans la partie « **Dynamique dans un référentiel non galiléen** », l'étude du champ de pesanteur est conduite en supposant le référentiel géocentrique galiléen. De nombreuses applications permettent d'illustrer cette partie : le pendule de Foucault, la déviation vers l'est, les vents géostrophiques, les courants marins ; l'étude statique des marées constitue également une ouverture pertinente.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2. Dynamique dans un référentiel non galiléen	
Cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen : force d'inertie d'entrainement.	Déterminer la force d'inertie d'entraînement. Appliquer la deuxième loi de Newton, le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.
Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen : force d'inertie d'entraînement, force d'inertie de Coriolis.	Exprimer la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis. Associer la force d'inertie d'entraînement axifuge à l'expression familière « force centrifuge ». Appliquer la deuxième loi de Newton, le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.
Champ de pesanteur terrestre : définition, évolution qualitative avec la latitude, ordres de grandeur.	Distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, illustrer un effet lié au caractère non galiléen du référentiel terrestre
Équilibre d'un fluide dans un référentiel non galiléen en translation ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser l'expression de la force d'inertie d'entraînement volumique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

La partie intitulée « **Mécanique des fluides** » est conçue comme une initiation de telle sorte que de nombreux concepts sont introduits de manière élémentaire. Toute extension du programme vers les cours spécialisés doit être évitée : par exemple l'approche lagrangienne, la fonction de courant, le potentiel complexe, l'étude locale du champ des vitesses, la relation de Bernoulli pour des écoulements compressibles ou instationnaires, le théorème de Reynolds et le théorème d'Euler sont hors programme.
L'apprentissage de la mécanique des fluides contribue à la maîtrise progressive des opérateurs d'analyse vectorielle qui sont utilisés par ailleurs en thermodynamique et en électromagnétisme. Quel que soit l'ordre dans lequel le professeur choisit de présenter ces parties, il convient d'introduire ces opérateurs en insistant sur le contenu physique sous-jacent. En outre, la recherche de lignes de courants est traitée exclusivement à l'aide d'outils numériques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Mécanique des fluides	
4.3.1. Description d'un fluide en mouvement	
Champ eulérien des vitesses. Lignes de champ. Tubes de champ.	Définir et utiliser l'approche eulérienne.
Écoulement stationnaire.	Discuter du caractère stationnaire d'un écoulement en fonction du référentiel d'étude.
Dérivée particulaire de la masse volumique. Écoulement incompressible.	Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Utiliser l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique pour caractériser un écoulement incompressible.
Débit massique. Débit volumique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur densité de courant de masse à travers une surface orientée. Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux du champ de vitesse à travers une surface orientée.
Équation locale de conservation de la masse.	Établir l'équation locale de conservation de la masse dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque à l'aide de l'opérateur divergence et son expression fournie.
Caractérisation d'un écoulement incompressible par la divergence du champ des vitesses.	Traduire localement, en fonction du champ de vitesses, le caractère incompressible d'un écoulement.
Dérivée particulaire du champ de vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire de la vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Utiliser l'expression de l'accélération, le terme convectif étant écrit sous la forme (**v.grad**) **v.** Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de **grad** ($v^2/2$) et **rot v** x **v**.

Écoulement irrotationnel défini par la nullité du rotationnel du champ des vitesses en tout point ; potentiel des vitesses.	Traduire localement, en fonction du champ de vitesses, le caractère irrotationnel d'un écoulement et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses.
4.3.2. Actions de contact dans un fluide en mouvement	
Forces de pression. Équivalent volumique.	Exprimer la force de pression exercée par un fluide sur une surface élémentaire. Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.
Contraintes tangentielles dans un écoulement $\mathbf{v} = v_x(y)\ \mathbf{u}_x$ au sein d'un fluide newtonien ; viscosité.	Utiliser l'expression fournie $d\mathbf{F}=\eta\partial v_x/\partial y dS\mathbf{u}_x$.
Équivalent volumique des forces de viscosité dans un écoulement incompressible.	Établir l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le cas d'un écoulement de cisaillement à une dimension et utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.
Traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien : nombre de Reynolds ; coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds.	Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.
4.3.3. Équations dynamiques locales	
Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	Utiliser l'équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.
Notion d'écoulement parfait et de couche limite.	Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide. Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.
Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.
4.3.4. Bilans macroscopiques	
Bilans de masse.	Établir un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert et fixe ou sur un système fermé et mobile.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Bilans de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie.	Associer un système fermé à un système ouvert pour faire un bilan. Utiliser le théorème de la quantité de mouvement et le théorème de l'énergie cinétique pour réaliser un bilan. Exploiter la nullité (admise) de la puissance des forces intérieures dans un écoulement parfait et incompressible.

5. Électromagnétisme

L'électromagnétisme a été abordé en classe de PCSI dans un domaine restreint (magnétostatique, induction électromagnétique et forces de Laplace) et sans le support des équations locales. Le programme de la classe de PC couvre en revanche tout le spectre des fréquences, des régimes stationnaires jusqu'aux phénomènes de propagation en passant par les régimes quasi-stationnaires et prend appui sur les équations locales (équation de conservation de la charge et équations de Maxwell). Le programme est découpé en parties indépendantes dont l'ordre de présentation relève de la liberté pédagogique du professeur. De nombreuses approches sont possibles, y compris en fractionnant les parties. Les phénomènes de propagation sont étudiés essentiellement dans le cadre du thème « **Physique des ondes** » du programme : l'articulation entre les parties « **Électromagnétisme** » et « **Physique des ondes** » relève elle aussi de la liberté pédagogique.
Toute étude de distributions de courants superficiels est exclue. La modélisation superficielle d'une distribution de charges est strictement limitée à la modélisation du condensateur plan par deux plans infinis uniformément chargés : on fait remarquer la discontinuité du champ à la traversée d'une nappe de charges superficielles mais les relations de passage ne figurent pas au programme.
S'agissant des potentiels, on se limite à introduire le potentiel scalaire en électrostatique et à faire remarquer que le champ électrique ne dérive pas d'un potentiel scalaire en régime variable.
L'apprentissage de l'électromagnétisme contribue à la maîtrise progressive des opérateurs d'analyse vectorielle qui sont utilisés par ailleurs en thermodynamique et en mécanique des fluides. Quel que soit l'ordre dans lequel le professeur choisit de présenter ces parties, il convient d'introduire ces opérateurs en insistant sur le contenu physique sous-jacent.
L'étude de l'électromagnétisme n'est pas centrée sur les calculs de champs : ceux-ci se limitent donc à des calculs motivés par des applications pratiques d'intérêt évident. La recherche des lignes de champ d'un champ donné est traitée exclusivement à l'aide d'outils numériques.

La partie « **Sources du champ électromagnétique** » étudie les sources du champ électromagnétique dans l'approximation des milieux continus. Par ailleurs, il convient de souligner et d'exploiter les analogies formelles avec les autres théories de champs : diffusion de particules, diffusion thermique, gravitation, mécanique des fluides.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Sources du champ électromagnétique	
5.1.1. Description microscopique et mésoscopique des sources	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Densité volumique de charges. Charge traversant un élément de surface fixe et vecteur densité de courant. Intensité du courant.	Exprimer la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique. Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant.
5.1.2 Conservation de la charge	
Équation locale de conservation de la charge.	Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie. Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant en régime stationnaire ; relier cette propriété à la loi des nœuds de l'électrocinétique.
5.1.3 Conduction électrique dans un conducteur ohmique	
Loi d'Ohm locale. Conductivité électrique.	Établir l'expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique, l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau étant décrite par une force de frottement fluide linéaire. Discuter de l'influence de la fréquence sur la conductivité électrique. Établir l'expression de la résistance d'une portion de conducteur filiforme.
Effet Hall.	Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie parallélépipédique.
Effet thermique du courant électrique : loi de Joule locale.	Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

La partie « **Électrostatique** » étudie les lois de l'électrostatique et quelques applications. Les calculs de champs doivent être motivés par l'utilisation de ces champs pour étudier des situations d'intérêt pratique évident. Ces calculs ne s'appuient sur la loi de Coulomb que pour des distributions de charges discrètes. Dans le cas des distributions continues, on se limite aux situations de haute symétrie permettant de calculer le champ par le théorème de Gauss et aux superpositions de champs ainsi obtenus. Cette rubrique permet aussi d'introduire et d'exploiter des analogies avec le champ gravitationnel qui a été étudié en PCSI dans le seul cas d'astres ponctuels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.2. Électrostatique	
5.2.1. Champ électrostatique	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Propriétés du champ électrostatique	
Symétries.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Équations locales.	Relier l'existence d'un potentiel électrostatique à la nullité du rotationnel du vecteur champ électrostatique. Justifier l'orthogonalité des lignes de champ avec les surfaces équipotentielles et leur orientation dans le sens des potentiels décroissants.
Théorème de Gauss et équation locale de Maxwell-Gauss.	Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.
Lignes de champ électrostatique. Équipotentielles.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ électrostatique. Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme du champ électrostatique à l'évasement des tubes de champ loin des sources. Relier équipotentielles et lignes de champ électrostatique. Évaluer la norme du champ électrostatique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.
5.2.2. Exemples de champs électrostatiques	
Dipôle électrostatique. Moment dipolaire.	Citer les conditions de l'approximation dipolaire.
Potentiel et champ créés par un dipôle.	Établir l'expression du potentiel électrostatique. Comparer la décroissance du champ et du potentiel avec la distance dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ électrostatique engendrées par un dipôle.
Actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure : résultante et moment.	Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.	Utiliser l'expression fournie de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.
Interactions ion-molécule et molécule-molécule.	Expliquer qualitativement la solvatation des ions dans un solvant polaire.
Dipôle induit. Polarisabilité.	Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur.
Plan infini uniformément chargé en surface.	Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
Condensateur plan. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.	Établir l'expression du champ créé par un condensateur plan. Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.
Énergie de constitution d'un noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée.	Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.
5.2.3. Analogies avec le champ gravitationnel	
Analogies entre champ électrostatique et champ gravitationnel.	Utiliser les analogies entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour déterminer l'expression de champs gravitationnels.

La partie « **Magnétostatique** » aborde l'étude du champ magnétique en régime stationnaire en prenant appui sur les équations locales : la loi de Biot et Savart ne figure pas au programme. L'objectif réside davantage dans l'étude des propriétés des champs magnétiques que dans leur calcul : les calculs de champ magnétique doivent donc se limiter à des situations d'intérêt pratique évident. Enfin, la notion de potentiel-vecteur est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.3. Magnétostatique	
5.3.1. Champ magnétostatique	
Équations locales de la magnétostatique et formes intégrales : flux conservatif et théorème d'Ampère.	Choisir un contour fermé et une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère.
Linéarité des équations.	Utiliser une méthode de superposition.
Propriétés de symétrie.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane) pour prévoir des propriétés du champ créé.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Propriétés topographiques.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique. Repérer, sur une carte de champ magnétostatique, d'éventuelles sources du champ et leur sens. Associer l'évolution de la norme d'un champ magnétique à l'évasement des tubes de champ.
5.3.2. Exemples de champs magnétostatiques	
Modèle du câble rectiligne infini.	Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini.
Solénoïde long sans effets de bords.	Établir et citer l'expression du champ à l'intérieur d'un solénoïde long, la nullité du champ extérieur étant admise.
Inductance propre. Densité volumique d'énergie magnétique.	Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde long. Associer l'énergie d'une bobine à une densité volumique d'énergie magnétique.
5.3.3. Dipôles magnétostatiques	
Moment magnétique d'une boucle de courant plane.	Relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique.
Rapport gyromagnétique de l'électron. Magnéton de Bohr.	Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent.
Actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure : résultante et moment.	Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et expliquer ses enjeux.
Énergie potentielle d'un dipôle magnétique rigide placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.	Utiliser l'expression fournie de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.

La partie « **Équations de Maxwell** » présente les équations de Maxwell en régime dépendant du temps. La notion de potentiel-vecteur est hors-programme mais on insiste sur le fait que le champ électrique ne dérive pas en général d'un potentiel scalaire. L'étude détaillée des ondes électromagnétiques qui prolonge cette partie est placée dans la partie « **Physique des ondes** ». On ne mentionne ici les phénomènes de propagation que pour les négliger dans le cadre des régimes lentement variables. Le cadre adopté est celui de

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

l’approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique, pour lequel les effets des distributions de courants dominent ceux des distributions de charges.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.4. Équations de Maxwell	
5.4.1. Postulats de l’électromagnétisme	
Force de Lorentz. Équations locales de Maxwell. Formes intégrales.	Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale. Relier l’équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l’équation locale de la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. Utiliser une méthode de superposition. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant des capteurs inductifs.**
5.4.2. Aspects énergétiques	
Vecteur de Poynting. Densité volumique d’énergie électromagnétique. Équation locale de Poynting.	Utiliser les grandeurs énergétiques pour conduire des bilans d’énergie électromagnétique. Associer le vecteur de Poynting et l’intensité lumineuse utilisée dans le domaine de l’optique.
5.4.3. Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique	
Équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide.	Établir les équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide. Expliquer le caractère non instantané des interactions électromagnétiques.
ARQS magnétique.	Discuter l’approximation des régimes quasi-stationnaires. Simplifier et utiliser les équations de Maxwell et l’équation de conservation de la charge dans l’approximation du régime quasi-stationnaire. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.

6. Physique des ondes

Le programme de physique des ondes de la classe de PC s’inscrit dans le prolongement de la partie « **Propagation d’un signal** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PCSI où des propriétés unificatrices (interférences, battements, etc.) ont été abordées en s’appuyant sur une approche expérimentale et sans référence à une équation d’onde. Il s’agit désormais de mettre en place l’équation d’onde de d’Alembert en mécanique, en acoustique et en électromagnétisme. On aborde ensuite l’étude de la dispersion, de l’atténuation et de l’absorption associées à des phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. La propagation d’ondes dans des milieux différents conduit naturellement à étudier la réflexion et la transmission d’ondes à une interface. L'étude de la physique des ondes s'achève par une introduction à la physique du laser et par une introduction à l'approche ondulatoire de la mécanique quantique.

La partie « **Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert** » est consacrée à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs régis par l'équation d'onde de d'Alembert. Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires. S'agissant de la modélisation microscopique des solides, l'objectif est uniquement de proposer une interprétation du module d'Young d'un solide ; par la suite, la mise en équations des ondes longitudinales dans les solides est conduite directement dans l'approximation du solide continu. Dans le cadre de la physique des ondes, on qualifiera de plane ou sphérique une onde par référence à sa dépendance spatiale f(x,t) ou f(r,t).

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert	
6.1.1. Ondes mécaniques unidimensionnelles dans les solides déformables	
Ondes transversales sur une corde vibrante.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.
Domaine d'élasticité d'un solide : module d'Young, loi de Hooke.	Exploiter le modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés pour relier le module d'Young d'un solide élastique à ses caractéristiques microscopiques.
Ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide.
Équation de d'Alembert ; célérité.	Identifier l'équation de d'Alembert. Relier qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.
Ondes progressives, ondes progressives harmoniques ; ondes stationnaires.	Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive. Utiliser qualitativement l'analyse de Fourier pour décrire une onde non harmonique.
Modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Résonances d'une corde de Melde.	Décrire les modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Interpréter quantitativement les résonances observées avec la corde de Melde en négligeant l'amortissement.
6.1.2. Ondes acoustiques dans les fluides	
Approximation acoustique. Équation de d'Alembert pour la surpression acoustique.	Classer les ondes acoustiques par domaines fréquentiels. Valider l'approximation acoustique. Établir, par une approche eulérienne, l'équation de propagation de la surpression acoustique dans une situation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes. Utiliser l'opérateur laplacien pour généraliser l'équation d'onde.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Célérité des ondes acoustiques.	Exprimer la célérité des ondes acoustiques en fonction de la température pour un gaz parfait.
Ondes planes progressives harmoniques : caractère longitudinal, impédance acoustique.	Exploiter la notion d'impédance acoustique pour faire le lien entre les champs de surpression et de vitesse d'une onde plane progressive harmonique. Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
Densité volumique d'énergie acoustique, vecteur densité de courant énergétique. Intensité sonore. Niveau d'intensité sonore.	Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Citer quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore.
Ondes acoustiques sphériques harmoniques.	Utiliser une expression fournie de la surpression pour interpréter par un argument énergétique la décroissance en 1/r de l'amplitude.
6.1.3. Ondes électromagnétiques dans le vide	
Équations de propagation d'un champ électromagnétique dans une région sans charge ni courant.	Établir et citer les équations de propagation d'un champ électromagnétique dans le vide.
Structure d'une onde plane progressive harmonique.	Établir et exploiter la structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Utiliser la superposition d'ondes planes progressives harmoniques pour justifier les propriétés d'ondes électromagnétiques planes progressives non harmoniques.
Aspects énergétiques.	Relier la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde électromagnétique. Interpréter le flux du vecteur de Poynting en termes particulaires. Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés.
Polarisation des ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques : polarisation elliptique, circulaire et rectiligne. Loi de Malus.	Relier l'expression du champ électrique à l'état de polarisation de l'onde. **Utiliser la loi de Malus.** **Reconnaître une lumière polarisée rectilignement.** **Distinguer une lumière non polarisée d'une lumière totalement polarisée.** **Utiliser une lame quart d'onde ou demi-onde pour modifier ou analyser un état de polarisation, avec de la lumière totalement polarisée.**

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

La partie « **Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels** » est consacrée aux phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. L'étude s'appuie sur des exemples variés empruntés aux domaines de la mécanique ou de l'électromagnétisme. Elle est menée sur des ondes harmoniques planes en représentation complexe puis sur des paquets d'ondes harmoniques planes. S'agissant des paquets d'ondes, on se limite au cas où l'étalement est négligeable.
L'étude de la propagation des ondes dans un plasma dilué est exclusivement limitée aux ondes transverses électriques ; le professeur est invité à signaler, sans soucis d'exhaustivité, quelques limites du modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.2. Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels	
6.2.1. Dispersion et absorption	
Propagation unidimensionnelle d'une onde harmonique dans un milieu linéaire.	Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles. Établir la relation de dispersion caractéristique d'un phénomène de propagation en utilisant des ondes de la forme $\exp \pm j(\underline{k}x-\omega t)$. Distinguer différents types de comportements selon la valeur de la pulsation.
Dispersion, absorption.	Associer les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$ aux phénomènes de dispersion et d'absorption.
Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.	Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre. Déterminer la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. **Étudier la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial.** <u>Capacité numérique :</u> à l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.
6.2.2. Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels	
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique unidirectionnelle dans un conducteur ohmique de conductivité réelle. Effet de peau dans un conducteur ohmique.	Identifier une analogie avec un phénomène de diffusion. Établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique à basses fréquences. Associer l'atténuation de l'onde dans le milieu conducteur à une dissipation d'énergie.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

	Estimer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à différentes fréquences.
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique transverse et unidirectionnelle dans un plasma dilué. Conductivité électrique complexe.	Justifier la neutralité électrique locale du plasma en présence d'une onde transverse. Établir l'expression de la conductivité électrique complexe du plasma. Interpréter énergétiquement le caractère imaginaire pur de la conductivité électrique complexe du plasma.
Relation de dispersion. Pulsation plasma. Domaine de transparence. Domaine réactif, onde évanescente.	Établir la relation de dispersion des ondes planes progressives harmoniques transverses. Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes dans le domaine de transparence du plasma. Interpréter la pulsation plasma comme une pulsation de coupure. Citer les caractéristiques d'une onde stationnaire évanescente. Justifier que, dans le domaine réactif, une onde électromagnétique harmonique ne transporte aucune puissance en moyenne.

La partie « **Interfaces entre deux milieux** » est consacrée à la réflexion et la transmission d'ondes à une interface plane sous incidence normale en acoustique et en électromagnétisme. Dans ce dernier cas, on admet que les milieux diélectriques, linéaires, homogènes et isotropes (DLHI) relèvent d'un traitement faisant apparaître l'indice complexe, mais aucune modélisation du comportement des DLHI ne figure au programme. On se limite dans tous les cas à des milieux non magnétiques. La notion de densité de courants superficiels et les relations de passage du champ électromagnétique ne figurent pas au programme de même que la notion de conducteur parfait. Les conditions aux limites sur la composante normale du champ électrique et la composante tangentielle du champ magnétique doivent être fournies si nécessaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.3. Interfaces entre deux milieux	
Réflexion et transmission d'une onde acoustique plane progressive sous incidence normale sur une interface plane infinie entre deux fluides : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses, des surpressions et des puissances acoustiques surfaciques moyennes.	Expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion. Associer l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.
Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique polarisée rectilignement à l'interface entre deux milieux d'indices complexes $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ dans le cas d'une incidence normale : coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique.	Exploiter la continuité admise du champ électromagnétique dans cette configuration pour obtenir l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en fonction des indices complexes. Utiliser les expressions des coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique dans des situations variées. Établir et interpréter les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en puissance dans le cas d'une interface

	entre deux milieux diélectriques linéaires, homogènes, isotropes et transparents. **Étudier la réflexion en amplitude de tension d'une onde électrique à l'extrémité d'un câble coaxial pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive.**

La partie « **Introduction à la physique du laser »** est consacrée à une introduction modeste à la physique du laser. Une approche descriptive des milieux amplificateurs de lumière est d'abord proposée ainsi qu'une introduction descriptive simplifiée à l'optique des faisceaux spatialement limités, dont l'un des objectifs est de pouvoir déterminer la puissance surfacique disponible, à partir de la prévision des dimensions de la tache de section minimale dans des configurations optiques élémentaires. On se limite au mode fondamental gaussien.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.4. Introduction à la physique du laser	
6.4.1. Milieu amplificateur de lumière	
Absorption, émission stimulée, émission spontanée.	Distinguer les propriétés d'un photon émis par émission spontanée ou stimulée.
Coefficients d'Einstein.	Associer l'émission spontanée à la durée de vie d'un niveau excité. Utiliser les coefficients d'Einstein dans le cas d'un système à plusieurs niveaux non dégénérés.
Amplification d'ondes lumineuses par émission stimulée.	Justifier qualitativement la nécessité d'une inversion de population pour parvenir à amplifier une onde électromagnétique dans un laser.
6.4.2. Propriétés optiques d'un faisceau spatialement limité	
Description simplifiée d'un faisceau de profil gaussien : waist, longueur de Rayleigh, ouverture angulaire.	Justifier qualitativement l'inadéquation du modèle de l'onde plane pour décrire un faisceau laser. Utiliser l'expression fournie du profil radial d'intensité. Construire l'allure d'un faisceau de profil gaussien à partir de l'enveloppe d'un faisceau cylindrique et d'un faisceau conique. Exploiter qualitativement le phénomène de diffraction pour relier le waist et l'ouverture angulaire du faisceau à grande distance.
Transformation à l'aide d'une lentille d'un faisceau cylindrique en faisceau conique et réciproquement. Élargisseur de faisceau.	Déterminer la dimension et la position de la section minimale du faisceau émergeant d'une lentille éclairée par un faisceau cylindrique.

Les parties précédentes ont permis d'introduire les outils et concepts de base associés à la physique des ondes, particulièrement tant qu'elle est régie par des équations aux dérivées partielles linéaires. S'il est un domaine où cette notion de linéarité joue un rôle central, c'est bien celui de la mécanique quantique.

La partie « **Approche ondulatoire de la mécanique quantique »** présente quelques-unes des notions associées à une description ondulatoire de ce domaine. La démarche adoptée, volontairement modeste, est centrée sur un approfondissement des notions introduites en première année que sont la dualité onde-corpuscule et l'inégalité de Heisenberg spatiale, les objectifs étant désormais quantitatifs. Il s'agit, sur des systèmes unidimensionnels et des situations physiques simplifiées d'envisager quelques conséquences qui découlent de cette description ondulatoire : l'effet tunnel et ses applications sont ainsi discutés comme aboutissement naturel des notions abordées dans cette partie. Elle est ancrée dans le réel : on insiste sur le fait que les situations envisagées décrivent des systèmes physiques réels effectivement unidimensionnels
Toute discussion autour de la mesure et de ses effets sur un système est exclue, de même que toute introduction au spin. L'accent est mis avant tout sur la mise en équations des situations physiques proposées à l'aide des outils de la physique des ondes, et sur la discussion graphique des résultats qui en découlent. Tout développement des calculs intermédiaires est donc naturellement proscrit et les expressions sur lesquelles s'appuient les discussions qualitatives doivent être fournies.
Le courant de probabilité est introduit dans un contexte restreint avec pour seul objectif d'exprimer le coefficient de transmission d'une barrière de potentiel.

6.5. Approche ondulatoire de la mécanique quantique	
6.5.1. Amplitude de probabilité	
Fonction d'onde ψ(x,t) associée à une particule dans un problème unidimensionnel. Densité linéique de probabilité de présence.	Normaliser une fonction d'onde. Relier qualitativement la fonction d'onde à la notion d'orbitale en chimie.
Principe de superposition. Interférences.	Relier la superposition de fonctions d'ondes à la description d'une expérience d'interférences entre particules.
6.5.2. Équation de Schrödinger pour une particule libre	
Équation de Schrödinger.	Utiliser l'équation de Schrödinger fournie.
États stationnaires.	Associer les états stationnaires aux états d'énergie déterminée. Établir et utiliser la forme $\psi(x,t) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ pour la fonction d'onde d'un état stationnaire et l'associer à la relation de Planck-Einstein. Distinguer l'onde associée à un état stationnaire en mécanique quantique d'une onde stationnaire au sens usuel de la physique des ondes.
Paquet d'ondes associé à une particule libre. Relation $\Delta k_x \, \Delta x \geq 1/2$.	Utiliser l'équation de Schrödinger pour déterminer la partie spatiale ϕ(x) des fonctions d'onde stationnaires décrivant une particule libre. Identifier la vitesse d'une particule libre et la vitesse du paquet d'ondes la décrivant. Exploiter l'inégalité de Heisenberg pour relier l'étendue spatiale et l'étendue spectrale du paquet d'ondes décrivant une particule libre.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Courant de probabilité associé à une particule libre.	Utiliser l'expression admise du courant de probabilité associé à une particule libre et l'interpréter comme un produit densité*vitesse.
6.5.3. Équation de Schrödinger dans un potentiel V(x) uniforme par morceaux	
Quantification de l'énergie dans un puits de potentiel rectangulaire de profondeur infinie.	Établir les expressions des énergies des états stationnaires. Retrouver qualitativement l'énergie minimale à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale.
Énergie de confinement quantique.	Associer le confinement d'une particule quantique à une augmentation de l'énergie cinétique.
Évolution temporelle d'une particule confinée dans une superposition d'états.	Mettre en évidence les oscillations d'une particule dont la fonction d'onde s'écrit comme la superposition de deux états stationnaires et relier la fréquence d'oscillation à la différence des énergies.
Quantification de l'énergie des états liés dans un puits de profondeur finie. Élargissement effectif du puits par les ondes évanescentes.	Décrire la forme des fonctions d'onde dans les différents domaines. Utiliser les conditions aux limites admises : continuité de ϕ et $d\phi/dx$. Associer la quantification de l'énergie au caractère lié de la particule. Mener une discussion graphique. Interpréter qualitativement, à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale, l'abaissement des niveaux d'énergie par rapport au puits de profondeur infinie.
6.5.4. Effet tunnel	
Effet tunnel. Coefficient de transmission associé à une particule libre incidente sur une barrière de potentiel.	Citer quelques applications de l'effet tunnel. Définir le coefficient de transmission comme un rapport de courants de probabilités. Utiliser une expression fournie du coefficient de transmission à travers une barrière de potentiel.

Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique de PCSI. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une aide.

1. Domaine optique

- Lames quart d'onde, lames demi-onde
- Interféromètre de Michelson

2. Domaine électrique

- Générateurs de signaux basse fréquence à modulation de fréquence
- Câbles coaxiaux, bouchons adaptés

3. Domaine thermodynamique
- Caméra thermique

Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de PC sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de PCSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'étude de l'outil gradient abordée en classe de PCSI en introduisant de nouveaux opérateurs : seules leurs expressions en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Toutes les autres formules utiles (expressions en coordonnées cylindriques ou sphériques, actions sur des produits, combinaisons d'opérateurs, etc.) doivent être fournies.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en classe de PCSI en admettant la décomposition d'une fonction non périodique du temps en une somme continue de fonctions sinusoïdales. De même qu'en classe de PCSI où le calcul des coefficients d'un développement en série de Fourier est exclu, on ne cherche pas à expliciter le poids relatif et les déphasages relatifs des différentes composantes de Fourier, de telle sorte que la transformée de Fourier n'est pas exigible. On insiste en revanche sur la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale « utile » ($\Delta\omega$ ou Δk_x) et l'étendue caractéristique d'un signal non périodique (Δt ou Δx).

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Calcul différentiel	
Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Dérivées partielles. Différentielle. Théorème de Schwarz.	Relier la différentielle et les dérivées partielles premières. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).
Intégration de l'expression d'une dérivée partielle.	Intégrer une expression de la forme $\partial f/\partial x=g(x,y)$ à y fixé en introduisant une fonction $\varphi(y)$ inconnue comme « constante d'intégration ».
2. Analyse vectorielle	
Gradient.	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à une date fixée. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Opérateur **b.grad**.	Exprimer la différentielle d'un champ de vecteurs à une date fixée. Exprimer les composantes de (**b.grad**)**a** en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.
Cas des champs proportionnels à exp(iωt-i**k.r**) ou exp(i**k.r**-iωt).	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur i**k**.
3. Analyse de Fourier	
Synthèse spectrale d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.
Synthèse spectrale d'une fonction non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale « utile » ($\Delta\omega$ ou Δk_x) et l'étendue caractéristique d'un signal non périodique (Δt ou Δx).
4. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert, équation de Schrödinger.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclut l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique de première année de la classe de PCSI.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Tableaux	
Tableaux à une ou deux dimensions.	Choisir une structure de données appropriée à la modélisation d'un problème physique. Réaliser des opérations algébriques simples sur des tableaux. Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour manipuler des tableaux.
2. Équations différentielles et équations aux dérivées partielles	
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et chimie (PC)

Annexe 3
Programme de chimie

Programme de chimie de la voie PC

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de chimie de la classe de PC est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de PCSI. Le programme vise à préparer les étudiant·e·s à un cursus d'ingénieur·e, de chercheur·se, d'enseignant·e ou de scientifique. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant·e les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats. L'acquisition de ce socle par les étudiant·es constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant·e.

Parce que la chimie est avant tout une science expérimentale qui développe la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier d'ingénieur·e, de chercheur·se ou de scientifique.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques, notamment dans le domaine de la simulation. Ces sciences offrent aujourd'hui aux étudiant·es la possibilité de modélisations numériques complexes, permettant de décrire plus finement le monde réel.

Afin justement de pouvoir élaborer des modèles en prise avec la réalité, les étudiant·es doivent apprendre à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits et celui des concepts et des théories. La démarche de modélisation occupe donc une place centrale dans le programme et l'enseignant·e doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative.

La construction d'un modèle passe par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie de l'étudiant·e et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à apprendre à mobiliser connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »,** sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiant·es doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques »** est structurée autour de chapitres portant sur les transformations de la matière d'une part et la constitution et les propriétés physiques et chimiques de la matière d'autre part, des modélisations macroscopiques et microscopiques venant rendre compte des phénomènes de plus en plus précisément. La présentation en deux colonnes « notions et contenus » et « capacités exigibles » met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiant·es est requise. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, des reprises sont effectuées en enrichissant les descriptions ; par exemple, le modèle de Lewis a été utilisé en première année pour décrire la constitution des entités et le modèle quantique est abordé en seconde année, la cinétique a été limitée en première année aux transformations en réacteur fermé et en deuxième année se poursuit dans le cadre de différents modèles de réacteurs ouverts. Le dialogue entre les deux niveaux de description macroscopique-microscopique se prolonge et, comme le dialogue entre le mondes des objets et des phénomènes et celui des modèles, reste une priorité du programme de chimie de deuxième année.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant·e doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiant·es ; l'annexe dédiée à cette composante en précise les objectifs.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiant·es doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de chimie et de physique en fin de l'année de PC.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tou·tes les étudiant·es. Il n'impose en aucun cas une progression, celle-ci relevant de la liberté pédagogique de l'enseignant·e.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiant·es et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiant·es sur les notions et capacités exigibles du programme.
La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiant·es des questions liées à la poursuite d'études scientifiques, à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme par exemple la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'éducation à l'**environnement** et au **développement durable**, le **réchauffement climatique**.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, représentation graphique, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de plusieurs documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les espèces chimiques de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral : o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente ; o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation ; o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, représentations graphiques, cartes mentales, etc.). - Écouter, confronter son point de vue.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

L’enseignant·e veille aussi à développer chez les étudiant·es des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :

- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- caractériser et valoriser ses compétences scientifiques, techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Repères pour l’enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l’enseignant·e organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiant·es en évitant tout dogmatisme : l’acquisition des connaissances, des capacités et des compétences sera d’autant plus efficace que les étudiant·es seront acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l’autonomie des étudiant·es. L’investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d’objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d’accès à l’information scientifique et technologique et ainsi former l’étudiant·e à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s’y prête, l’enseignant·e peut le mettre en perspective avec l’histoire des sciences et des techniques, avec des questions d’actualité ou des débats d’idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques, physique, mathématiques, informatique.

Concernant l’évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d’autonomie et d’initiative des étudiant·es, l’enseignant·e veillera soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d’en élargir le plus possible le spectre.

Formation expérimentale

Cette partie, spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiant·es lors des séances de travaux pratiques, vient compléter la liste des thèmes d’étude – en gras dans la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d’une séance peut être définie.
D’une part, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la **mesure** et de l’évaluation des **incertitudes**. D’autre part, elle présente de façon détaillée l’ensemble des **capacités expérimentales** qui doivent être acquises et pratiquées en autonomie par les étudiant·es à l’issue de la seconde année, un grand nombre d’entre elles ayant déjà été mise en œuvre en première année.

Une liste de matériel, que les étudiant·es doivent savoir utiliser avec l’aide d’une notice succincte, figure en **Annexe 1** du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année. L’accent est mis sur la variabilité de la mesure d’une grandeur physique et sa caractérisation à l’aide de l’incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d’une même grandeur physique

© Ministère de l’enseignement supérieur, de la recherche et de l’innovation, 2021

est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiant·es en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. **Capacité numérique** : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de type Monte-Carlo permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. **Capacité numérique** : à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, simuler un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude-type sur les paramètres du modèle.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiant·es doivent avoir acquises, durant les séances de travaux pratiques, à l'issue de la seconde année. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans le corps du programme – peuvent servir à définir.
Les capacités rassemblées ici ne constituent donc en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'organiseraient autour d'une découverte du matériel : par exemple, toutes les capacités mises en œuvre autour d'un appareil de mesure ne sauraient être l'objectif unique d'une séance, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion de l'étude d'un problème concret.

Les différentes capacités à acquérir sont, pour plus de clarté, regroupées en quatre domaines en chimie, les deux premiers étant davantage transversaux :

2.1. Prévention du risque au laboratoire de chimie
2.2. Mesures de grandeurs physiques
2.3. Synthèses chimiques
2.4. Analyses qualitatives et quantitatives

Cette structuration ne constitue pas une incitation à limiter une activité expérimentale à un seul domaine. En effet, lors de la mise en œuvre d'une synthèse au laboratoire, il peut être utile de procéder à une analyse du produit formé ou à une mesure de grandeur physique caractéristique et, bien entendu, il est indispensable de prendre en compte les consignes de sécurité.
Par ailleurs, il convient de développer les compétences de la démarche scientifique et de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative des étudiant·es lors des activités expérimentales.
Le matériel nécessaire à l'acquisition de l'ensemble des capacités ci-dessous figure en **Annexe 1** du programme.

2.1. Prévention du risque au laboratoire de chimie

Les étudiant·es doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation, au rejet et au stockage des espèces chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futur·es ingénieur·es, chercheur·es, enseignant·es, il·elle·s doivent être sensibilisé·es au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Prévention du risque chimique Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H), conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

2.2. Mesures de grandeurs physiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Mesures de : - Volume - Masse - pH - Conductance et conductivité - Tension et intensité du courant - Température - Pouvoir rotatoire - Indice de réfraction - Absorbance et transmittance	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie *In* et *Ex*. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié. Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé. Utiliser les appareils de mesure (balance, pH-mètre, conductimètre, voltmètre, ampèremètre, thermomètre, réfractomètre, spectrophotomètre, polarimètre) en s'appuyant sur une notice. Mettre en œuvre des mesures calorimétriques à pression constante. Choisir les électrodes adaptées à une mesure électrochimique. Construire un dispositif électrochimique à partir de sa représentation symbolique. Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.

2.3. Synthèses chimiques

Au cours de la seconde année, l'étudiant·e poursuit l'acquisition des différentes techniques mises en œuvre dans les synthèses et de leurs fondements théoriques, en lien avec les propriétés physico-chimiques concernées. Progressivement, il·elle est invité·e à proposer des stratégies de transformation des réactifs, de séparation et de purification des produits synthétisés.

Les différentes techniques utilisées permettent de réaliser les opérations de :
- chauffage et refroidissement ;
- séparation et purification : extraction liquide-liquide ou liquide-solide, filtration, distillation, séchage d'un liquide ou d'un solide, séparation avec usage de l'évaporateur rotatif, recristallisation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Transformation chimique Transformations à chaud, à froid, à température ambiante. Contrôle et régulation de la température du milieu réactionnel.	Choisir la verrerie adaptée à la transformation réalisée et aux conditions opératoires mises en œuvre. Réaliser le ou les montages appropriés et en expliquer le principe et l'intérêt.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

	Choisir ou justifier l'ordre d'introduction des réactifs. Réaliser et réguler une addition au goutte à goutte. Utiliser le moyen de chauffage ou de refroidissement adéquat. Suivre et contrôler l'évolution de la température dans le réacteur. Choisir un moyen approprié pour réguler une éventuelle ébullition. Utiliser un réfrigérant, contrôler et réguler le reflux.
Suivi de l'évolution de la transformation.	Mettre en œuvre des méthodes permettant de suivre qualitativement ou quantitativement l'avancement de la transformation.
Séparation et purification	Choisir ou justifier un protocole de séparation ou de purification d'un produit, sur la base de données fournies ou issues d'observations et/ou de mesures.
Séparation de deux liquides non miscibles.	Réaliser une extraction liquide-liquide. Identifier la nature des phases dans une ampoule à décanter. Distinguer extraction et lavage d'une phase.
Séparations par distillation.	Réaliser une hydrodistillation. Réaliser une distillation fractionnée.
Séparation de deux espèces dissoutes dans une phase liquide.	Élaborer et mettre en œuvre un protocole de séparation de deux espèces dissoutes dans une phase liquide.
Séparation d'un soluté du solvant. Séparation d'un liquide et d'un solide.	Expliquer l'intérêt de l'évaporateur rotatif. Réaliser et mettre en œuvre une filtration simple, une filtration sous pression réduite. Choisir et justifier la méthode de filtration adaptée au système étudié.
Lavage d'un solide.	Réaliser et justifier les différentes étapes du lavage d'un solide : ajout du solvant de lavage, trituration, essorage.
Recristallisation d'un solide.	Expliquer et mettre en œuvre la technique de recristallisation. Justifier à l'aide de données pertinentes et/ou par l'observation le choix d'un solvant de recristallisation et la quantité mise en œuvre.
Séchage d'un liquide.	Utiliser un desséchant solide et estimer correctement, par l'observation, la quantité à utiliser.

2.4. Analyses qualitatives et quantitatives

Au cours de la première année, l'étudiant·e acquiert la maîtrise de différentes techniques expérimentales mises en œuvre lors des analyses qualitatives et quantitatives pour identifier et caractériser une espèce chimique, en contrôler la pureté ou la doser. L'étudiant·e sait distinguer les méthodes d'analyse destructives et non destructives et développe progressivement la capacité à proposer une stratégie de mesures de concentrations ou de quantités de matière, une méthode de

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

caractérisation d'une espèce chimique, tenant compte des propriétés physico-chimiques du système étudié.

Les techniques utilisées lors des analyses qualitatives et quantitatives sont les suivantes : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, spectrophotométrie UV-visible, polarimétrie, réfractométrie, chromatographie sur couche mince.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Caractérisation d'une espèce chimique et contrôle de sa pureté	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Chromatographie sur couche mince.	Mettre en œuvre une chromatographie sur couche mince pour l'identification d'un produit et le suivi d'une transformation. Justifier le choix de la méthode de révélation utilisée. Interpréter l'ordre d'élution des différentes espèces en relation avec leurs propriétés physico-chimiques et les caractéristiques de la phase stationnaire et de l'éluant.
Détermination expérimentale de grandeurs physiques ou spectroscopiques caractéristiques de l'espèce chimique (les principes théoriques de la RMN sont hors programme).	Extraire d'une banque de données des informations sur les propriétés physiques des produits. Mesurer une température de fusion. Mesurer un indice de réfraction. Mesurer un pouvoir rotatoire. Mesurer une absorbance. Déterminer un coefficient d'absorption molaire en spectroscopie UV-visible. Comparer les données tabulées aux valeurs mesurées et interpréter d'éventuels écarts. Comparer les caractéristiques d'un produit synthétisé avec celles du produit commercial. À partir d'une mesure appropriée, déterminer le rendement d'une synthèse, d'une méthode de séparation.
Dosages par étalonnage	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-visible.
Dosages par titrage Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, indicateurs de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage (recenser les espèces présentes dans le milieu au cours du titrage, repérer l'équivalence, justifier qualitativement l'allure de la courbe ou le changement de couleur ou d'aspect observé). Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur de fin de titrage.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Méthodes d'exploitation des courbes expérimentales.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la quantité de matière, masse ou concentration de l'espèce titrée. Exploiter une courbe de titrage pour déterminer une valeur expérimentale d'une constante thermodynamique d'équilibre. Utiliser un logiciel de simulation pour tracer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Justifier la nécessité d'effectuer un titrage indirect. Distinguer équivalence et repérage de fin de titrage.
Suivi cinétique de transformations chimiques Suivi de l'évolution temporelle d'une grandeur physique. Limitation de l'évolution temporelle (trempe) d'un système par dilution, transformation chimique ou refroidissement. Régulation de la température.	 Choisir une méthode de suivi prenant en compte la facilité de mise en œuvre, les propriétés des espèces étudiées, la durée de la transformation estimée ou fournie. Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer une énergie d'activation.

Contenus thématiques

Les contenus thématiques de la classe de PC complètent ceux introduits en PCSI en chimie sur la constitution et les transformations de la matière et en physique sur la thermodynamique et la mécanique quantique. Ils enrichissent des modèles déjà abordés et en introduisent de nouveaux tant à l'échelle microscopique que macroscopique : modèle quantique des atomes et des molécules, modèles de réacteurs ouverts, etc.

Tout au long des deux années, la formation en chimie privilégie la capacité de l'étudiant·e à raisonner, à prévoir et à transposer ses connaissances dans des situations nouvelles ou sur des espèces proches de celles étudiées, plutôt que sa capacité à restituer, à reproduire. Ainsi les programmes sont structurés autour des outils du raisonnement que sont les théories et les modèles de comportement macroscopique ou microscopique et non pas autour d'une présentation encyclopédique, systématique, des espèces chimiques et des réactions associées.

Il s'agit de montrer que la chimie est une science au sein de laquelle la dialectique entre savoirs et méthodes permet d'aborder des situations nouvelles et de construire de nouvelles connaissances en chimie mais aussi aux interfaces avec la biologie, la physique, les géosciences. Ainsi formés en chimie, les futur·es ingénieur·es ou chercheur·es scientifiques pourront être acteurs de l'innovation, que ce soit dans le cadre de la recherche, du développement et de la production industrielle pour relever les défis sociétaux et environnementaux à venir.

L'ordre de présentation des contenus proposé n'est pas nécessairement celui qui doit être adopté par l'enseignant·e qui dispose de toute liberté pour effectuer des choix et établir sa propre progression annuelle dont le seul objectif reste de permettre l'acquisition par tous les étudiant·es de l'ensemble des capacités exigibles. Un travail en collaboration avec l'enseignant·e de physique est vivement recommandé afin de favoriser les apprentissages sur les domaines communs abordés dans les deux disciplines. Par ailleurs, les contenus thématiques précisent les concepts et les

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

modèles à étudier : l'enseignant·e les aborde à partir de problématiques authentiques et les illustre par des applications concrètes et motivantes.

1. **Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamique et cinétique**
   1.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
   1.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
   1.3. Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques
   1.4. Changements de phase de corps purs et de mélanges binaires
   1.5. Thermodynamique et cinétique des transformations modélisées par des réactions d'oxydo-réduction

2. **Constitution de la matière : modélisation quantique et réactivité**
   2.1. Orbitales atomiques
   2.2. Orbitales moléculaires et réactivité
   2.3. Constitution et réactivité des complexes

3. **Transformations de la matière en chimie organique**
   3.1. Conversion de groupes caractéristiques
   3.2. Création de liaisons carbone-carbone

1. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamique et cinétique

Au laboratoire et dans l'industrie, l'innovation comme l'optimisation des techniques et des procédés de synthèse ou de séparation s'appuient sur des fondements thermodynamiques et cinétiques. La thermodynamique notamment permet de prévoir si la transformation envisagée est possible ou non et de trouver d'éventuelles pistes d'augmentation du rendement en faisant évoluer l'état d'équilibre final du système. Elle permet aussi d'appréhender les propriétés physico-chimiques des mélanges et d'envisager une voie d'accès aux corps purs.

Les objectifs de cette partie sont les suivants :
- appliquer les deux principes de la thermodynamique à la transformation physico-chimique ;
- aborder les changements d'échelle opérés dans les procédés industriels avec les transformations et effets thermiques mis en jeu dans des réacteurs continus ;
- utiliser les diagrammes isobares de mélanges binaires pour interpréter les techniques de séparation ;
- appliquer les notions de thermodynamique et de cinétique aux réactions d'oxydo-réduction mises en jeu dans les piles et les électrolyseurs.

À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :
- faire preuve de rigueur dans la définition et la description d'un système physico-chimique ;
- modéliser un système réel ;
- distinguer modélisation d'une transformation (réaction et écriture de l'équation de réaction) et description quantitative de l'évolution d'un système prenant en compte les conditions expérimentales choisies pour réaliser la transformation ;
- établir un bilan thermique ;
- confronter des grandeurs calculées ou tabulées à des mesures expérimentales ;
- pratiquer un raisonnement qualitatif ou quantitatif à partir de représentations graphiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

1.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques

L'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif à la transformation du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques isobares. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.
Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, PCI et PCS des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel. Un prolongement est proposé dans le cadre de l'étude thermique au sein des réacteurs continus dans la partie portant sur les procédés industriels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
État standard. Enthalpie standard de réaction. Loi de Hess. État standard de référence d'un élément, enthalpie standard de formation. Enthalpie standard de dissociation de liaison.	Déterminer une enthalpie standard de réaction à l'aide de données thermodynamiques.
Effets thermiques lors d'une transformation monobare : - transfert thermique associé à la transformation chimique monobare monotherme ; - variation de température lors d'une transformation monobare et adiabatique.	Prévoir le sens et calculer la valeur du transfert thermique entre un système, siège d'une transformation physico-chimique monobare et monotherme, et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation physico-chimique, monobare et adiabatique. **Capacité numérique** : tracer, à l'aide d'un langage de programmation, l'évolution temporelle de la température pour un système siège d'une transformation adiabatique modélisée par une seule réaction chimique dont les caractéristiques cinétiques et l'enthalpie standard de réaction sont données. **Déterminer une enthalpie standard de réaction**.

1.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques

Le critère d'évolution spontanée d'un système, utilisé dès la première année en chimie, est démontré par application du second principe de la thermodynamique introduit en physique en première année. On adopte pour les potentiels chimiques une expression générale : $\mu_i=\mu_i^{réf}+RT\times\ln(a_i)$ qui fait référence aux activités a_i introduites en première année. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'une espèce en phase condensée est illustrée à travers le phénomène d'osmose.
Les transformations physico-chimiques envisagées sont des transformations isobares. Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température. Les capacités numériques abordées en PCSI pour déterminer l'état final d'un système dont la transformation est modélisée par une ou deux réactions peuvent être réactivées.

En première année, la relation d'Arrhenius a permis de modéliser, au niveau macroscopique, l'évolution de la constante de vitesse d'une réaction chimique avec la température et a introduit la notion d'énergie d'activation qui suggère qu'un système doit surmonter une barrière énergétique pour réagir ; cette modélisation empirique n'a nécessité aucune connaissance microscopique sur l'évolution du système et sur le mécanisme réactionnel. La théorie du complexe activé (état de transition) repose sur un modèle microscopique (dont les hypothèses ne sont pas abordées) et permet de relier les propriétés d'un système réactif à la constante de vitesse de réaction à travers la relation d'Eyring (non démontrée) dont l'expression est analogue à celle de la relation d'Arrhenius. La constante de vitesse est ainsi reliée aux enthalpie et entropie standard d'activation, définies en considérant les différences de ces grandeurs entre état de transition et état réactif.

Problématiques, illustrations et applications sont choisies dans le domaine industriel (optimisation d'une synthèse, traitement d'une eau par procédés osmotiques, etc.), en biologie (ATP et réactions couplées, respiration, etc.), et en géosciences (sédimentation, concrétions calcaires, etc.), mais aussi au niveau du laboratoire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Identités thermodynamiques ; potentiel chimique. Entropie, entropie molaire standard absolue. Enthalpie libre.	Écrire les identités thermodynamiques pour les fonctions U, H et G. Distinguer et justifier le caractère intensif ou extensif des grandeurs physiques utilisées. Interpréter qualitativement une variation d'entropie en termes de nombre de micro-états accessibles.
Potentiel chimique dans le cas modèle des gaz parfaits : $\mu_i = \mu_i°(T) + RT\times\ln(p_i/p°)$ Potentiel chimique $\mu_i = \mu_i^{réf} + RT\times\ln a_i$ dans les cas modèles de : - espèces chimiques en phase condensée en mélange idéal ; - solutés infiniment dilués. Influence de la pression sur $\mu_i^{réf}$ pour des espèces en phase condensée.	Établir l'expression du potentiel chimique dans le cas modèle des gaz parfaits purs. Utiliser le potentiel chimique pour prévoir l'évolution d'un système contenant une espèce chimique dans plusieurs phases. Exprimer l'enthalpie libre d'un système chimique en fonction des potentiels chimiques. Déterminer une variation d'enthalpie libre, d'enthalpie et d'entropie entre deux états du système chimique.
Osmose, pression osmotique d'une solution.	Utiliser le potentiel chimique pour interpréter le transfert d'un solvant au travers d'une membrane. Relier la pression osmotique à la différence de potentiel chimique du solvant dans les deux phases.
Enthalpie de réaction, entropie de réaction, enthalpie libre de réaction ; grandeurs standard associées. Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction. Équilibre physico-chimique. Constante thermodynamique d'équilibre ; relation de van't Hoff.	Justifier qualitativement ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction. Relier enthalpie libre de réaction et création d'entropie lors d'une transformation d'un système physico-chimique. Prévoir le sens d'évolution d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Relation entre enthalpie libre de réaction, constante thermodynamique d'équilibre et quotient de réaction.	Déterminer une grandeur standard de réaction à l'aide de données thermodynamiques et de la loi de Hess. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre à une température quelconque. Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une ou plusieurs réactions chimiques. **Capacité numérique :** tracer, à l'aide d'un langage de programmation, le taux d'avancement à l'équilibre en fonction de la température pour un système siège d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction.
Nombre de degrés de liberté d'un système physico-chimique à l'équilibre ; variance.	Reconnaître si une grandeur intensive est ou non un facteur d'équilibre. Dénombrer les degrés de liberté d'un système à l'équilibre et interpréter le résultat.
Enthalpie libre standard d'activation, enthalpie standard d'activation, entropie standard d'activation.	Déterminer une enthalpie standard ou une entropie standard d'activation à partir de données cinétiques, la relation d'Eyring étant fournie. Relier l'entropie standard d'activation aux contraintes dans l'état de transition. Interpréter l'action d'un catalyseur à l'aide de données sur les enthalpies et entropies standard d'activation.

1.3. Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques

Les transformations chimiques de la matière réalisées au laboratoire mettent en jeu de faibles quantités de matière et sont conduites en réacteur fermé. À l'échelle industrielle, les transformations mettent en jeu des quantités de matière beaucoup plus élevées et sont souvent conduites en réacteur ouvert pour assurer un fonctionnement continu.
Les chimistes peuvent être amenés à transposer à l'échelle industrielle un protocole élaboré au laboratoire.
L'objectif de cette partie est un réinvestissement de connaissances acquises en cinétique et en thermodynamique dans le cadre d'une initiation aux bilans de matière et aux bilans thermiques effectués sur des réacteurs ouverts continus.
L'étude des opérations unitaires s'inscrit dans le prolongement de la mécanique des fluides en physique, et, en chimie, de la cinétique en réacteur fermé et de la thermodynamique, domaines qui sont à la base du génie des procédés et de la technologie chimique.
Les modèles de réacteurs continus idéaux étudiés sont transposables aux réacteurs microfluidiques, mais également en biologie et en géosciences.
Sensibiliser les étudiant·es aux enjeux spécifiques du secteur industriel est un élément majeur de leur formation. Des procédés chimiques innovants s'imposent pour développer des techniques et des appareils adaptés permettant d'obtenir des rendements supérieurs à ceux des procédés conventionnels, tout en limitant leurs impacts environnementaux, en mettant au point des procédés

plus sûrs, moins consommateurs d'énergie, de matières premières et de solvants et également moins polluants.

Notions et contenus	Capacités exigibles
D'un protocole de laboratoire à un procédé industriel	
Opérations unitaires d'un procédé. Procédés discontinus. Procédés continus en régime stationnaire : débit de matière en masse et en quantité de matière, bilan de matière.	Exploiter un schéma de procédé légendé. Identifier un procédé continu ou discontinu. Effectuer un bilan de matière global ou sur une seule espèce pour une opération unitaire d'un procédé continu de caractéristiques données.
Cinétique de transformations en réacteur chimique ouvert	
Modèle du réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas d'un écoulement de débits en volume égaux à l'entrée et à la sortie ; dimensionnement du réacteur. Taux de conversion d'un réactif. Temps de passage.	Effectuer un bilan de matière pour un réacteur parfaitement agité continu. Relier le taux de conversion du réactif au temps de passage pour une transformation modélisée par une réaction de loi de vitesse donnée. Estimer le dimensionnement d'un réacteur parfaitement agité continu pour un taux de conversion et un débit de matière donnés.
Modèle du réacteur chimique en écoulement piston isotherme en régime stationnaire dans le cas de débits en volume égaux à l'entrée et à la sortie du réacteur ; dimensionnement du réacteur.	Établir un bilan de matière pour un réacteur en écoulement piston. Relier le taux de conversion en sortie d'un réacteur en écoulement piston et le temps de passage pour une transformation modélisée par une loi de vitesse d'ordre 1. Estimer le dimensionnement d'un réacteur en écoulement piston pour un taux de conversion et un débit de matière donné.
Étude thermique d'un réacteur chimique ouvert	
Bilan énergétique sur un réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas de débits en volume égaux à l'entrée et à la sortie. Sécurité des réacteurs : flux thermique et régulation de température.	Effectuer un bilan énergétique sur un réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire. Déterminer la température de fonctionnement d'un réacteur parfaitement agité continu de caractéristiques données dans l'hypothèse d'une transformation adiabatique. Déterminer le flux thermique échangé par un réacteur parfaitement agité dans des conditions de fonctionnement données. **Capacité numérique :** à l'aide d'un langage de programmation, déterminer le(s) point(s) de fonctionnement (température et taux de conversion) d'un réacteur parfaitement agité continu siège d'une transformation modélisée par une réaction unique et en discuter la stabilité.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

1.4. Changements de phase de corps purs et de mélanges binaires

L'étude des changements de phase de corps purs et de mélanges binaires s'effectue à l'aide de diagrammes isobares construits à partir des courbes d'analyse thermique ou fournis. Les tracés théoriques ne sont pas attendus. Ces diagrammes sont utilisés pour interpréter les techniques de distillations.

L'enseignant·e choisit des exemples concrets relatifs à des problématiques rencontrées au laboratoire et à des procédés industriels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Corps pur, mélange, système binaire, fractions molaire et massique. Miscibilité totale, partielle ou nulle.	Convertir des fractions molaires en fractions massiques dans le cas de systèmes binaires et inversement. Interpréter la miscibilité à l'échelle microscopique par les interactions entre entités. Citer la température comme facteur d'influence de la miscibilité.
Diagrammes isobares d'équilibre liquide-vapeur : - avec miscibilité totale à l'état liquide, - avec miscibilité nulle à l'état liquide, - avec miscibilité partielle à l'état liquide. Théorème des moments chimiques.	Construire un diagramme isobare d'équilibre entre phases d'un mélange binaire à partir d'informations relatives aux courbes d'analyse thermique. Décrire les caractéristiques des mélanges homoazéotropes, hétéroazéotropes. Exploiter les diagrammes isobares d'équilibre entre phases, pour une composition en fraction molaire ou massique donnée : - tracer l'allure de la courbe d'analyse thermique en indiquant le nombre de degrés de liberté du système sur chaque partie de la courbe ; - déterminer les températures de début et de fin de changement d'état ; - déterminer la composition des phases en présence à une température fixée ainsi que les quantités de matière ou les masses dans chaque phase. Déterminer la solubilité d'une des espèces chimiques du système binaire dans l'autre à partir du diagramme binaire.
Distillations.	Interpréter une distillation simple, une hydrodistillation, une distillation fractionnée, à l'aide des diagrammes isobares d'équilibre liquide-vapeur. **Mettre en œuvre une distillation fractionnée ou une hydrodistillation à la pression atmosphérique.**

1.5. Thermodynamique et cinétique des transformations modélisées par des réactions d'oxydo-réduction

L'importance des systèmes électrochimiques se manifeste dans la diversité de leurs applications : accumulateurs et procédés d'électrosynthèse mettent en jeu la conversion d'énergie électrique en énergie chimique, des capteurs électrochimiques sont utilisés dans l'analyse de l'eau, de l'air ou d'effluents, la protection contre la corrosion est un enjeu sociétal important, etc.
L'étude thermodynamique et cinétique des réactions d'oxydo-réduction développée dans cette partie se fonde sur les acquis de cinétique chimique et sur l'étude des réactions d'oxydo-réduction et des piles débutée en première année, ainsi que sur la partie de thermodynamique chimique de seconde année.
L'approche de l'électrochimie proposée ici privilégie les raisonnements qualitatifs et les aspects expérimentaux, plutôt que les développements théoriques et mathématisés. Les courbes courant-potentiel, dont le tracé est proposé en capacité expérimentale, sont un outil essentiel dans la compréhension et la modélisation des systèmes électrochimiques. L'étude d'une électrolyse complète les capacités expérimentales sur les piles développées en première année.
L'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre est appelé surpotentiel plutôt que surtension pour des raisons pédagogiques, en cohérence avec le vocabulaire anglo-saxon correspondant.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction	
Relation entre enthalpie libre de réaction et potentiels de Nernst des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.	Citer et exploiter la relation entre l'enthalpie libre de réaction et les potentiels de Nernst des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.
Relation entre enthalpie libre standard de réaction et potentiels standard des couples impliqués.	Déterminer l'enthalpie libre standard d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples mis en jeu. Déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple d'oxydo-réduction à partir de données thermodynamiques (constantes d'équilibre, potentiels standard).
Approche thermodynamique du fonctionnement d'une pile électrochimique.	Relier tension à vide d'une pile et enthalpie libre de réaction. Décrire et expliquer le fonctionnement d'une pile électrochimique à partir de données sur sa constitution et de tables de potentiels standard.
Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction	
Courbes courant-potentiel sur une électrode en régime stationnaire : - surpotentiel, - systèmes rapides et systèmes lents, - nature de l'électrode, - courant limite de diffusion, - vagues successives, - domaine d'inertie électrochimique du solvant.	Relier vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. Relier, qualitativement ou quantitativement, l'intensité du courant limite de diffusion à la concentration du réactif, au nombre d'électrons échangés et à la surface immergée de l'électrode.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Tracer l'allure de courbes courant-potentiel à partir de données fournies. Identifier les paramètres d'influence du domaine d'inertie électrochimique du solvant.
Utilisation des courbes courant-potentiel Transformations spontanées : - notion de potentiel mixte, - fonctionnement d'une pile électrochimique.	**Tracer et utiliser des courbes courant-potentiel.** Reconnaitre une transformation spontanée et étudier qualitativement sa vitesse à partir de courbes courant-potentiel données. Utiliser les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'une pile électrochimique et prévoir la valeur de la tension à vide. Citer les paramètres influençant la résistance interne d'une pile.
Transformations forcées : électrolyse, recharge d'un accumulateur.	**Mettre en œuvre une électrolyse.** Utiliser les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'un dispositif siège d'une électrolyse et prévoir la valeur de la tension minimale à imposer. Utiliser les courbes courant-potentiel pour justifier la nécessité : - de purifier une solution électrolytique avant l'électrolyse, - de choisir les électrodes permettant de réaliser l'électrolyse voulue. Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié. Déterminer la masse de produit formé pour une durée et des conditions données d'électrolyse. Citer les paramètres influençant la résistance interne du dispositif siège d'une électrolyse.
Stockage et conversion d'énergie chimique.	Identifier piles, électrolyseurs et accumulateurs comme des dispositifs mettant en jeu des conversions entre énergie chimique et énergie électrique.

2. Constitution de la matière : modélisation quantique et réactivité

La catalyse par les complexes des métaux de transition trouve de très nombreuses applications comme par exemple la réaction de Heck en chimie fine, la carbonylation du méthanol en chimie industrielle, les processus de respiration et de photosynthèse en chimie du vivant. Elle s'inscrit dans la démarche vertueuse de la chimie éco-responsable et permet notamment des synthèses dans des conditions douces. La compréhension de ces systèmes catalytiques nécessite l'analyse de la structure électronique des complexes par l'utilisation des orbitales atomiques et moléculaires.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Ces nouveaux modèles de description de la matière à l'échelle microscopique complètent la description des entités moléculaires abordée en première année, en s'appuyant sur la notion de fonction d'onde introduite dans le programme de physique de PCSI. L'objectif de cette description microscopique est l'interprétation et la prévision de la réactivité dans le cadre de l'approximation des orbitales frontalières.

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- construire des diagrammes d'orbitales moléculaires ou les interpréter en vue de la prévision de la réactivité d'une entité chimique ;
- interpréter des propriétés des complexes de métaux de transition et l'utilisation de ces complexes comme catalyseurs ou éléments structurants.

2.1. Orbitales atomiques

La modélisation quantique de l'atome a été abordée en première année dans le cadre du cours de physique au travers des concepts de fonction d'onde et de quantification de l'énergie, ainsi que du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène. Ces premiers éléments sont ici réinvestis pour construire le modèle quantique de l'atome d'hydrogène et des atomes polyélectroniques. Aucune détermination d'expression analytique d'une fonction d'onde n'est attendue.
Cette partie est par ailleurs l'occasion de relier la construction du tableau périodique des éléments, utilisé depuis le lycée, à la modélisation quantique de l'atome et de compléter la description de l'organisation de cet outil essentiel pour les chimistes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonctions d'onde électroniques ψ de l'atome d'hydrogène. Nombres quantiques n, l, m_l, m_s. Énergie et rayon associés à une fonction d'onde.	Interpréter $\|\psi\|^2$ comme la densité de probabilité de présence d'un électron en un point et la relier à la densité de charge. Prévoir qualitativement, pour l'atome d'hydrogène et les ions hydrogénoïdes, l'évolution du rayon et de l'énergie associés à une fonction d'onde en fonction du nombre quantique principal.
Orbitales des atomes polyélectroniques, représentation schématique. Configuration électronique d'un atome et d'un ion monoatomique. Électrons de cœur et de valence.	Dessiner l'allure des orbitales atomiques s et p. Établir la configuration électronique d'un atome ou d'un ion à l'état fondamental. Déterminer le nombre d'électrons non appariés d'un atome dans son état fondamental.
Notion qualitative de charge effective. Électronégativité. Rayon d'une orbitale atomique, polarisabilité.	Relier qualitativement le rayon associé à une orbitale atomique à la charge effective. Relier qualitativement l'énergie associée à une orbitale atomique à l'électronégativité de l'atome. Relier qualitativement le rayon associé aux orbitales de valence d'un atome à sa polarisabilité.
Architecture du tableau périodique des éléments. Organisation par blocs.	Relier la position d'un élément dans le tableau périodique à la configuration électronique de l'atome associé dans son état fondamental.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

	Situer dans le tableau les familles suivantes : métaux alcalins et alcalino-terreux, halogènes et gaz nobles.

2.2. Orbitales moléculaires et réactivité

La construction des diagrammes d'orbitales moléculaires est limitée aux cas des molécules diatomiques A_2 ou AB, sans mélange d'orbitales s et p. En revanche, les diagrammes d'interaction impliquant trois orbitales ou plus ne sont pas à construire mais sont fournis à l'étudiant·e qui doit pouvoir les interpréter : remplissage des niveaux, identification des orbitales frontalières HO et BV, analyse du caractère liant, antiliant ou non liant d'une orbitale moléculaire.

De même, la construction des diagrammes d'orbitales moléculaires de systèmes plus complexes est hors programme ; l'étudiant·e interprète ces diagrammes à partir des propriétés de deux fragments en interaction dont les orbitales sont fournies.

Dans le but de disposer de modèles simples applicables en chimie organique, l'approximation des orbitales frontalières permet de prévoir la réactivité électrophile ou nucléophile des entités mises en jeu ; ce modèle complète l'étude de l'addition nucléophile et de la substitution nucléophile abordées en première année. Ces orbitales peuvent être obtenues grâce à des logiciels ou à partir de bases de données.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Construction des orbitales moléculaires Méthode de Combinaison Linéaire des Orbitales Atomiques. Interaction de deux orbitales atomiques sur deux centres : - recouvrement ; - orbitales liante, antiliante, non liante ; - énergie d'une orbitale moléculaire ; - orbitale σ, orbitale π ; - représentation conventionnelle d'une orbitale moléculaire par schématisation graphique de la combinaison linéaire des orbitales atomiques. Interaction d'orbitales de fragments. Diagramme d'orbitales moléculaires : occupation des niveaux, orbitales frontalières haute occupée et basse vacante, cas des entités radicalaires. Ordre de liaison dans les molécules diatomiques.	Identifier les conditions d'interaction de deux orbitales atomiques : recouvrement et critère énergétique. Construire des orbitales moléculaires de molécules diatomiques par interaction d'orbitales atomiques du même type (s-s, p-p). Reconnaître le caractère liant, antiliant, non liant d'une orbitale moléculaire à partir de sa représentation conventionnelle ou d'une surface d'iso-densité. Identifier la symétrie σ ou π d'une orbitale moléculaire à partir de sa représentation conventionnelle ou d'une surface d'iso-densité. Proposer une représentation conventionnelle d'une orbitale moléculaire tenant compte d'une éventuelle dissymétrie du système. Justifier la dissymétrie d'une orbitale moléculaire obtenue par interaction d'orbitales atomiques centrées sur des atomes d'éléments différents. Prévoir ou interpréter l'ordre énergétique des orbitales moléculaires et établir qualitativement un diagramme énergétique d'orbitales d'une molécule diatomique. Justifier l'existence d'interactions entre orbitales de fragment en termes de recouvrement ou d'écart d'énergie.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

	Décrire l'occupation des niveaux d'un diagramme d'orbitales moléculaires. Identifier les orbitales frontalières à partir d'un diagramme d'orbitales moléculaires de valence fourni. Interpréter un diagramme d'orbitales moléculaires obtenu par interaction des orbitales de deux fragments, fournies. Relier, dans une molécule diatomique, l'évolution des caractéristiques de la liaison à l'évolution de l'ordre de liaison.
Prévision de la réactivité Approximation des orbitales frontalières.	Utiliser les orbitales frontalières pour prévoir la réactivité nucléophile ou électrophile d'une entité (molécule ou ion). Interpréter l'addition nucléophile sur le groupe carbonyle et la substitution nucléophile en termes d'interactions frontalières. Comparer la réactivité de deux entités à l'aide des orbitales frontalières.

2.3. Constitution et réactivité des complexes

L'étude de la structure des complexes est limitée à l'interprétation de la liaison entre l'atome central et le ligand par l'interaction entre une orbitale d d'une entité du bloc d et une orbitale d'un ligand σ-donneur ou d'un ligand ayant des effets π, par une démarche identique à celle développée dans la partie « Orbitales moléculaires et réactivité ». Les représentations des orbitales d ne sont pas exigibles et doivent être fournies. La construction complète du diagramme d'orbitales moléculaires d'un complexe et la levée partielle de dégénérescence des orbitales d sont hors-programme.

Les complexes constituent des systèmes très importants à la fois dans le domaine industriel où ils interviennent dans les procédés de séparation, de dépollution et en catalyse, ainsi que dans celui du vivant au travers des métalloenzymes intervenant dans des processus biologiques. L'étude de la stabilité des complexes prolonge la partie du programme de première année sur les transformations chimiques en solution aqueuse et permet un réinvestissement des capacités correspondantes : utilisation de données thermodynamiques, prévision de l'état final d'un système modélisé par une seule réaction, interprétation d'observations. Elle permet aussi la mise en œuvre de concepts de thermodynamique, d'oxydo-réduction et de chimie orbitalaire.

Pour l'étude de la stabilité des complexes en solution aqueuse, les équations des réactions correspondant aux formations et dissociations ne sont pas exigibles et sont fournies. Les transformations abordées sont modélisées par une seule réaction : les problématiques liées à des phénomènes de complexations successives sont donc hors-programme.

Les complexes peuvent être utilisés comme catalyseurs, par exemple pour des hydrogénations et des polymérisations. Aucun cycle catalytique n'est exigible, mais les étapes d'un cycle fourni doivent être reconnues par l'étudiant·e. Le formalisme de Green est hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Structure des complexes	
	Reconnaitre le(s) site(s) de coordination d'un

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Modélisation de la liaison dans un complexe entre une entité du bloc *d* et un ligand σ-donneur intervenant par une seule orbitale.	ligand à partir d'un schéma de Lewis. Établir qualitativement le diagramme d'interaction entre une orbitale d'une entité du bloc *d* et une orbitale d'un ligand σ-donneur. Prévoir qualitativement l'influence de l'énergie de l'orbitale de l'entité du bloc *d* sur la stabilisation des électrons du ligand par la complexation.
Stabilité des complexes métalliques en solution aqueuse Constantes de formation et de dissociation. Diagramme de prédominance en fonction de p*L*. Effet chélate.	Extraire, de ressources disponibles, les données thermodynamiques pertinentes pour prévoir qualitativement l'état final d'un système siège d'une unique réaction de complexation ou pour interpréter des observations expérimentales. Utiliser les diagrammes de prédominance pour prévoir des espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Retrouver les valeurs de constantes thermodynamiques d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement). Interpréter, à l'aide du modèle orbitalaire, des différences de valeurs de constante de formation de différents complexes. Interpréter l'évolution du caractère oxydant ou réducteur d'une entité par complexation. Interpréter l'effet d'un ligand polydenté sur la constante de formation d'un complexe. **Préparer, analyser, caractériser ou déterminer la constante de formation d'un complexe d'une entité du bloc d.** **Mettre en œuvre une réaction de complexation pour réaliser une analyse qualitative ou quantitative en solution aqueuse.**
Activité catalytique des complexes ; cycles catalytiques Ligands π-donneurs et π-accepteurs. Coordination des systèmes π non délocalisés.	Reconnaître un ligand ayant des effets π à partir de la donnée de ses orbitales de valence. Identifier les interactions orbitalaires principales entre une entité du bloc d et un alcène, le monoxyde de carbone et le dihydrogène. Interpréter la modification de réactivité d'un alcène, du monoxyde de carbone et du dihydrogène par les phénomènes électroniques mis en jeu lors de leur coordination.
Cycles catalytiques : - étapes d'association et de dissociation, d'addition oxydante et	Établir l'équation de la réaction catalysée à partir de la donnée d'un cycle catalytique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

d'élimination réductrice, d'insertion et d'élimination ; - catalyseurs et précurseurs de catalyseur. Hydrogénation en catalyse homogène. Polymérisation des alcènes par coordination.	Reconnaître la nature d'une étape dans un cycle catalytique. Proposer un ou des produits plausibles d'une étape d'un cycle dont les réactifs sont donnés. Identifier la nature des étapes intervenant lors de l'hydrogénation en catalyse homogène et de la polymérisation des alcènes par coordination, les cycles catalytiques étant fournis. Proposer une structure pour la macromolécule vinylique linéaire obtenue par polymérisation d'un alcène donné. Déterminer la structure de l'alcène permettant de synthétiser une macromolécule vinylique linéaire donnée.

3. Transformations de la matière en chimie organique

Médicaments, produits phytosanitaires, matériaux polymères de synthèse aussi différents que les latex de peinture ou les boucliers thermiques des véhicules spatiaux : ces synthèses en chimie fine ou en productions de fort tonnage découlent d'une démarche d'ingénierie moléculaire s'appuyant entre autres sur les apports de la chimie organique. L'élaboration, l'identification et la caractérisation des structures et la prévision de la réactivité des entités relèvent de méthodes fondamentales dont les principes sont abordés dans les programmes de chimie des deux années.

Le programme de seconde année s'inscrit dans la continuité de celui de première année et poursuit les objectifs suivants :

- s'approprier la logique de la synthèse organique grâce aux compléments de formation relatifs aux conversions de groupes caractéristiques et à la création de liaison carbone-carbone ;
- consolider et compléter les connaissances des mécanismes fondamentaux et les capacités relatives à leur écriture à l'aide du formalisme des flèches courbes et des orbitales moléculaires.

L'enseignement de la chimie organique s'appuie sur les connaissances et capacités nouvellement acquises en thermodynamique et cinétique chimiques et exploite les modèles orbitalaires de description des structures et de la réactivité, introduits dans la partie « Constitution de la matière : modélisation quantique et réactivité ». L'utilisation des orbitales frontalières permet la prévision des géométries d'approche des réactifs et, dans le cas où l'évolution du système est sous contrôle frontalier, la prévision de la structure du produit majoritaire dans la transformation. Les orbitales moléculaires sont systématiquement fournies aux étudiant·es. Le tableau à la fin de ce préambule et précédant le paragraphe 3.1, comporte des notions et capacités exigibles transversales et communes à toutes les transformations abordées dans les parties 3.1 et 3.2.

L'approche retenue privilégie l'aspect mécanistique et la stratégie de synthèse et non une présentation monographique, ceci afin de favoriser le raisonnement et la transférabilité dans des situations analogues, mais l'enseignant·e dispose de sa liberté pédagogique pour construire la progression de son choix.

Le programme de seconde année poursuit la volonté du programme de première année d'amener les étudiant·es à conduire une véritable réflexion sur la stratégie de synthèse : identification des groupes caractéristiques mis en jeu, analyse de la réactivité comparée des entités, interprétation de la nature et de l'ordre des étapes mises en œuvre dans le cas d'une synthèse multi-étapes, analyse des choix expérimentaux.

L'élaboration d'une synthèse multi-étapes par les étudiant·es eux-mêmes peut se faire en autonomie à l'aide d'une banque de réactions fournie ou à l'aide des réactions qui figurent explicitement au

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

programme. Les réactions indiquées dans la colonne de gauche doivent être connues et seuls les mécanismes explicitement inscrits sont exigibles et doivent pouvoir être écrits sans information supplémentaire. Pour ce qui concerne les propriétés acido-basiques, une table de pK_a sera systématiquement fournie.

Le cours et les activités s'appuient sur des exemples issus aussi bien des domaines de la chimie fine, de la chimie du vivant et de la chimie industrielle et permettent une sensibilisation aux principes de la chimie éco-responsable.À travers les capacités et contenus exigibles, sont développées des compétences générales qui pourront par la suite être réinvesties, consolidées et valorisées, parmi lesquelles :

- choisir le ou les modèle(s) pertinent(s) de description géométrique, électronique ou orbitalaire d'une entité pour rendre compte de sa réactivité ;
- utiliser des modèles de prédiction de l'évolution du système dans le cadre des transformations proposées ;
- pratiquer un raisonnement par analogie (analyse de réactivités et écriture de mécanismes) ;
- proposer une stratégie de synthèse à l'aide d'une banque de réactions ou des réactions au programme.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Familles fonctionnelles en chimie organique. Aspects thermodynamiques et cinétiques des transformations de la matière en chimie organique. Sites électrophiles et nucléophiles des réactifs. Modélisation de la géométrie des approches des réactifs.	Identifier dans une entité donnée les familles fonctionnelles suivantes : alcène, alcyne, halogénoalcane, alcool, ester sulfonique, 1,2-diol, éther-oxyde, époxyde, hémiacétal, acétal, amine, aldéhyde, cétone, acide carboxylique, ester, amide, chlorure d'acyle, anhydride d'acide. Discuter des aspects thermodynamiques et cinétiques des transformations effectuées à l'aide de données tabulées et de résultats expérimentaux. Identifier les sites électrophiles et nucléophiles des réactifs à l'aide de leurs structures de Lewis ou de leurs orbitales frontalières. Prévoir ou justifier la géométrie privilégiée d'approche de réactifs à partir de leurs orbitales frontalières fournies.
Synthèses organiques au laboratoire.	**Conduire des synthèses, des purifications, des caractérisations et des analyses de la pureté de produits à l'aide de protocoles donnés.** **Proposer ou adapter un protocole expérimental permettant de réaliser une synthèse organique à partir de données fournies.** **Analyser et justifier les choix expérimentaux dans une synthèse organique.**

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

3.1. Conversion de groupes caractéristiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Additions électrophiles sur les doubles liaisons carbone-carbone Hydratation en milieu acide : conditions expérimentales, régiosélectivité, réactivité comparée des alcènes, mécanisme limite. Hydroboration d'une double liaison carbone-carbone terminale par le borane : régiosélectivité, mécanisme limite de l'addition du borane sur l'alcène ; hydrolyse oxydante.	Prévoir ou justifier la régiosélectivité de l'hydratation à l'aide de la stabilité des carbocations intermédiaires. Prévoir ou justifier la régiosélectivité de l'hydroboration à l'aide des effets stériques.
Additions nucléophiles suivies du départ d'un nucléofuge	
De l'acide carboxylique aux amides et aux esters. Activation *ex situ* du groupe carboxyle sous forme d'un chlorure d'acyle ou d'un anhydride d'acide. Activation *in situ* du groupe carboxyle par protonation. Autres activations du groupe carboxyle : utilisation d'une banque de réactions. Synthèse des esters à partir des acides carboxyliques, des chlorures d'acyle et des anhydrides d'acide : aspects cinétiques et thermodynamiques, mécanismes limites. Synthèse des amides à partir des acides carboxyliques, des chlorures d'acyle et des anhydrides d'acide : aspects cinétiques et thermodynamiques, mécanismes limites.	Comparer les réactivités électrophiles des acides carboxyliques, chlorures d'acyle, anhydrides d'acide, esters, amides, les aptitudes nucléofuges des groupes partants dans les molécules correspondantes et en déduire l'importance de l'activation du groupe carboxyle. Proposer et/ou analyser, le cas échéant à partir d'une banque de réactions fournie, différents moyens d'activation d'un groupe carboxyle. Expliquer comment obtenir un bon rendement de synthèse d'un ester à partir d'un alcool primaire ou secondaire et d'un acide carboxylique, selon la méthode d'activation choisie et les conditions expérimentales. Justifier le choix des conditions expérimentales retenues pour la synthèse des amides.
Des amides ou esters à l'acide carboxylique. Hydrolyses en milieu acide et en milieu basique des esters et des amides : conditions expérimentales, mécanismes.	Justifier le choix des conditions opératoires d'hydrolyse.
Utilisation de la synthèse d'amides ou d'esters pour la protection des groupes carboxyle, amino ou hydroxyle.	Reconnaître ou justifier la nécessité de protéger un groupe carboxyle, amino ou hydroxyle dans le cadre d'une stratégie de synthèse. Proposer ou justifier des conditions de protection ou de déprotection d'un groupe carboxyle, amino ou hydroxyle à partir d'une banque de réactions fournie.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
Synthèse de polyesters et de polyamides à partir de diacides carboxyliques.	Proposer des réactifs permettant de synthétiser un polyester ou un polyamide donné. Représenter le polyester ou le polyamide obtenu par polymérisation de monomères donnés. Justifier les choix expérimentaux effectués dans un protocole donné de synthèse de polyester ou de polyamide.
Structure primaire des peptides et protéines : acides α-aminés, liaison peptidique.	Identifier un peptide ou une protéine comme un enchaînement d'unités issues d'acides α-aminés (aucune structure ou nomenclature d'acides α-aminés n'est exigible). Identifier les chaînes latérales dans des acides α-aminés, des peptides ou des protéines fournis.
Conversion de groupes caractéristiques par des réactions d'oxydo-réduction	
Hydrogénation des doubles et triples liaisons carbone-carbone en catalyse hétérogène, aspects stéréochimiques.	Identifier les différents types d'interactions entre le catalyseur hétérogène et les réactifs.
Époxydation directe par un peroxyacide ; réactivité comparée des alcènes. Ouverture des époxydes en milieu basique : mécanisme, élaboration de diols par addition anti.	Discuter de la régiosélectivité de l'époxydation sur un polyène. Justifier la régiosélectivité et la stéréosélectivité de l'ouverture d'un époxyde par un nucléophile, en l'absence d'activation par un acide de Lewis ou de Bronsted.
De l'ester à l'aldéhyde ou à l'alcool primaire ; mécanisme schématique de la réduction des esters.	Interpréter la réduction d'un ester en alcool primaire en assimilant le réactif à un ion hydrure nucléophile. Identifier le produit de réduction d'un ester par un hydrure complexe, à l'aide de données fournies (chimiques et/ou spectroscopiques). Reconnaître ou proposer dans une stratégie de synthèse la conversion entre un ester et un aldéhyde ou un alcool primaire.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

3.2. Création de liaisons carbone-carbone

Notions et contenus	Capacités exigibles
Réaction de Diels-Alder	
Diastéréosélectivité, stéréospécificité, régiosélectivité, influence de la structure des réactifs sur la vitesse de la transformation (règle d'Alder). Réaction de rétro-Diels-Alder.	Identifier les interactions orbitalaires mises en jeu entre les réactifs. Interpréter les résultats cinétiques, stéréochimiques et la régiosélectivité d'une réaction de Diels-Alder sous contrôle cinétique.
Réactivité nucléophile des énolates	
Équilibre de tautomérie céto-énolique. Acidité d'un aldéhyde ou d'une cétone. Généralisation à d'autres espèces énolisables.	Représenter le(s) énol(s) isomère(s) d'une espèce énolisable. Identifier un énol et représenter l'aldéhyde ou la cétone dont il est l'isomère. Représenter la base conjuguée d'une espèce énolisable et justifier sa stabilité à l'aide du formalisme de la mésomérie. Proposer ou justifier le choix d'une base permettant de déprotoner une espèce énolisable, les valeurs des pK_a étant fournies.
C-alkylation en position α d'un groupe carbonyle de cétone : mécanisme limite, régiosélectivité de l'alkylation des énolates.	Justifier la réactivité nucléophile ambidente de l'énolate dans le formalisme de la mésomérie ou par l'analyse de ses orbitales frontalières. Décrire les interactions entre orbitales frontalières des réactifs et interpréter la régiosélectivité de l'alkylation de l'énolate.
Aldolisation non dirigée : mécanisme en milieu basique aqueux ou alcoolique. Aldolisation croisée dirigée avec déprotonation totale préalable : mécanisme, intérêt synthétique.	Identifier dans une analyse rétrosynthétique les réactifs permettant d'obtenir un aldol, un cétol, un α-énal, une α-énone. Choisir dans le cadre d'une stratégie de synthèse les meilleures conditions expérimentales de préparation d'un aldol (d'un cétol) issu d'une aldolisation croisée. Justifier par la compétition avec l'aldolisation l'impossibilité d'alkyler un aldéhyde.
Crotonisation : déshydratation de l'aldol (cétol) en présence d'une base, mécanisme E1$_{cb}$, régiosélectivité.	Justifier la régiosélectivité de la crotonisation en présence d'une base.
Réaction de Michael sur une α-énone ; mécanisme.	Décrire les interactions entre orbitales frontalières des réactifs et interpréter la régiosélectivité de la réaction de Michael. Identifier dans une analyse rétrosynthétique les réactifs permettant de réaliser une addition de Michael sur une α-énone.
Utilisation des organomagnésiens en synthèse	

Notions et contenus	Capacités exigibles
Synthèse des alcools par action des organomagnésiens sur les époxydes et les esters, mécanismes.	Identifier dans une analyse rétrosynthétique les réactifs de la synthèse magnésienne d'un alcool.

Annexe 1 : liste de matériel

Cette liste regroupe le matériel que les étudiant·es doivent savoir utiliser avec, le cas échéant, l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique de chimie organique, rodée ou non rodée : ballons, ampoule de coulée (isobare ou non), réfrigérant, dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, chauffe-ballon, agitateur magnétique chauffant, etc.), dispositifs d'agitation, colonne à distiller, ampoule à décanter, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite, appareil de Dean-Stark.
- Évaporateur rotatif
- Matériel de chromatographie sur couche mince
- Lampe UV
- Banc de Kofler
- Réfractomètre
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Voltmètre et électrodes
- Ampèremètre
- Conductimètre et cellule de mesure
- Polarimètre
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en chimie. La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la chimie fait partie des compétences exigibles. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu, mais tous ces outils n'ont pas vocation à être mis en œuvre en chimie.
Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique ou formel).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Système linéaire de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas n = p = 2. Utiliser des outils numériques ou de calcul formel dans les autres cas.
Équation non linéaire.	Représenter graphiquement une équation de la forme f(x) = g(x).

	Interpréter graphiquement la ou les solutions. Dans le cas général, résoudre à l'aide d'un outil numérique ou de calcul formel.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre : « équation homogène».
Autres équations différentielles d'ordre 1.	Résoudre numériquement l'équation différentielle avec un outil fourni. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et la représentation graphique de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithmes népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle.
Dérivée. Notation dx/dt. Développements limités.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement. Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1 + x)^{\alpha}$, e^{x}, $\ln(1 + x)$ et $\sin(x)$, et à l'ordre 2 de la fonction $\cos(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser un grapheur pour tracer une courbe d'équation $y = f(x)$ donnée. Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée d'un espace de dimension inférieure ou égale à 3. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, à un point, les translations et les rotations de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle, d'une branche d'hyperbole, d'une parabole.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Connaître les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

	sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre, du volume d'un parallélépipède.
Barycentre d'un système de points.	Connaître la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Connaître les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python incluant l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques dans la formation des étudiant·es vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée et à mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique-chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Outils numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour représenter un nuage de points et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles…).
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles…).
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par la méthode dichotomique. Écrire un programme mettant en œuvre la méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser les fonctions **bisect** ou **newton** de la bibliothèque **scipy.optimize** (leurs spécifications étant fournies).

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Systèmes linéaires de n équations indépendantes à n inconnues.	Définir les matrices A et B adaptées à la représentation matricielle AX = B du système à résoudre. Utiliser la fonction **solve** de la bibliothèque **numpy.linalg** (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique centré ou décentré pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Écrire un programme mettant en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ou un système d'équations différentielles.
5. Statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction **hist** de la bibliothèque **matplotlib.pyplot** (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Enseignements secondaire et supérieur

Classes préparatoires scientifiques

Objectifs de formation et programme des classes préparatoires de seconde année de physique et technologie (PT) et de physique et technologie* (PT*) : modification

NOR : ESRS2111735A
arrêté du 13-7-2021 - JO du 5-8-2021
MESRI - DGESIP A1-2 - MENJS - DGESCO - MOM

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10 février 1995 modifiés ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du Cneser du 8-6-2021 ; avis du CSE du 17-6-2021

Article 1 - Les programmes de mathématiques, de physique et de chimie de seconde année de la classe préparatoire scientifique physique et technologie (PT), annexés à l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, sont remplacés par les programmes de mathématiques et de physique-chimie figurant respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis et Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 4 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 13 juillet 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer, et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle, et par délégation,
La cheffe du service de la stratégie des formations et de la vie étudiante, adjointe à la directrice générale,
Isabelle Prat

Annexes

↳ *Programmes des classes préparatoires de seconde année de physique et technologie (PT) et de physique et technologie* (PT*)*

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et technologie (PT)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classe préparatoire PT
Programme de mathématiques

Table des matières

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre linéaire et euclidienne d'une part, en analyse (calcul différentiel) d'autre part ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines. Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend deux sections. La première prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année, introduit la notion de déterminant en dimension quelconque et aboutit à une solide étude de la réduction : diagonalisation, trigonalisation. La deuxième, après quelques généralités sur les espaces préhilbertiens et le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, étudie les isométries vectorielles d'un espace euclidien avec un accent sur les dimensions 2 et 3. Le théorème spectral est étudié du point de vue matriciel.

Le programme d'analyse est introduit par l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle qui s'attache à relier les registres analytique et géométrique en développant une étude aussi bien affine que métrique des arcs paramétrés. L'étude des enveloppes insiste sur la vision géométrique et conduit à celle de la développée d'une courbe régulière.
La section relative aux séries numériques met l'accent sur la convergence absolue et limite l'étude des séries semi-convergentes au cas des séries alternées. Il constitue une introduction à l'étude des séries entières qui sont utilisées pour développer une fonction en série, calculer la somme de certaines séries numériques, trouver des solutions d'une équation différentielle, ou encore définir les séries génératrices en probabilités.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable.
Le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonction et l'étude de la régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes propose une introduction a minima de la dénombrabilité en appui des notions générales de la théorie des probabilités, afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste. La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations différentielles est limitée au cas des équations linéaires d'ordre 2, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. On indique quelques exemples de résolution : solutions développables en série entière, résolution à partir d'une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.

La section sur les fonctions de deux ou trois variables vise à mettre en place des outils pour l'analyse et la géométrie et prévoit une étude à l'ordre deux des extremums des fonctions de deux variables. La section sur les courbes et les surfaces exploite, d'une part, les fonctions de deux ou trois variables (courbes du plan définies par une équation cartésienne, surfaces paramétrées ou définies par une équation cartésienne, courbes sur une surface), d'autre part, la géométrie euclidienne du plan et les matrices symétriques d'ordre 2 (étude des coniques).

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes. En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments d'algèbre linéaire

Cette section est organisée autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts : produit et somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace, hyperplans ;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 et 3 et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Dimension d'une somme directe.	Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour la somme de plus de trois sous-espaces, toute autre caractérisation est hors programme.
b) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de stabilité d'un sous-espace et, inversement, traduire cette stabilité sous forme matricielle.
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
d) Hyperplans en dimension finie	
Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, défini comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire. Équations d'un hyperplan. Si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel. Interprétation géométrique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.

B - Déterminants

Le déterminant est présenté dans sa version matricielle. L'interprétation géométrique en termes d'aire et de volume algébrique est faite via le produit mixte défini en première année. Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd. Le vocabulaire des formes multilinéaires alternées, le groupe symétrique et les formules de Cramer sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : *i.* det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; *ii.* det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; *iii.* $\det(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Pour $n \in \{2,3\}$, on fait le lien avec le produit mixte de deux ou trois vecteurs.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	Le déterminant d'une matrice carrée est nul si et seulement si la famille de ses colonnes est liée.
Déterminant d'un produit de matrices carrées. Déterminant de l'inverse.	La démonstration est hors programme.
Déterminant de la transposée.	La démonstration est hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	La démonstration n'est pas exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme. Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.

C - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
Tout développement sur les polynômes d'endomorphisme est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.	Équation aux éléments propres $f(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(f)$.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$. Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
b) Polynôme caractéristique	
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \det(x\,I_n - A)$ est polynomiale, unitaire, de degré n.	La démonstration n'est pas exigible pour $n \geqslant 4$.
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Notations χ_A, χ_f.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
c) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E, si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E.	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Cas où χ_f est scindé à racines simples. Traduction matricielle des résultats précédents relatifs aux endomorphismes.
d) Endomorphismes et matrices trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	La démonstration est hors programme. Traduction matricielle.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme. Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

A - Structure préhilbertienne

En première année, la notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue géométrique en dimensions 2 et 3. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en petite dimension pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x\cdot y$. Expression $X^\top Y$. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.	 Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité en dimension quelconque	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d'un sous espace vectoriel. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	 Notation $F^\perp$.
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.

Contenus	Capacités & Commentaires
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x, F)$. Application à la recherche du minimum.

B - Isométries d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les décrire en dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Exemples : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	
Groupe orthogonal d'un espace euclidien E.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal. Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle directe, isométrie vectorielle indirecte.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.
c) Isométries vectorielles en dimension 2	
Orientation d'un plan euclidien de dimension 2. Base directe, base indirecte. Description des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
d) Isométries vectorielles en dimension 3	
Orientation d'un espace euclidien de dimension 3. Base directe, base indirecte. Orientation d'une droite, d'un plan d'un espace orienté. Rotation vectorielle d'axe orienté et d'angle donnés. Réflexion vectorielle. Matrices dans une base adaptée.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Réduction en base orthonormée d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et l'angle de la rotation.

e) Matrices symétriques réelles

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice symétrique réelle.	Notation $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.	
Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1}$).	A est dite orthogonalement diagonalisable. La démonstration est hors programme.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées

La section sur les fonctions vectorielles trouve une illustration naturelle dans l'étude des courbes paramétrées.
Il convient de formaliser des notions géométriques (courbe paramétrée, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.
Sur des exemples, l'étude d'une courbe paramétrée peut être amenée par la détermination d'un lieu géométrique.
La longueur d'une courbe paramétrée est définie par la formule intégrale et tout développement théorique est hors programme. On peut cependant présenter la définition géométrique à l'aide de figures.
Dans l'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée, les problèmes de régularité que l'on peut rencontrer dans les calculs n'ont pas à être soulevés et ils n'ont pas l'importance de l'interprétation géométrique que l'on peut obtenir.
L'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée et celle de l'enveloppe d'une famille de droites privilégient la vision géométrique plutôt que le recours à l'application de formules.
L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

a) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3)

Contenus	Capacités & commentaires
Limite en un point. Continuité en un point. Continuité globale.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Vecteur dérivé en un point.	Caractérisation par les fonctions coordonnées. Interprétation cinématique.
Fonction dérivée.	
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'un produit.	La dérivée du produit s'applique au produit d'une fonction numérique par une fonction vectorielle, au produit scalaire de deux fonctions vectorielles et au produit vectoriel de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz).	La formule du produit s'applique au produit d'une fonction numérique par une fonction vectorielle.
Formule de Taylor-Young.	La démonstration est hors programme.
Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage d'un point.	Les calculs sont faits à l'aide des fonctions coordonnées.

b) Courbes paramétrées du plan et de l'espace

Contenus	Capacités & commentaires
Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.	Notation $t \mapsto M(t)$.
Tangente en un point $M(t_0)$.	Sous réserve d'existence, la tangente est dirigée par $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{v}(t)$ avec $\overrightarrow{v}(t)$ un vecteur unitaire dirigeant la corde $[M(t_0)M(t)]$.
Point régulier, courbe régulière.	
Vecteur tangent en un point régulier.	Détermination d'une équation ou d'un paramétrage de la tangente.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Orientation d'une courbe.	L'orientation d'une courbe régulière peut se faire par le choix d'un vecteur unitaire dirigeant la tangente ou par celui d'un sens de parcours de la courbe.
c) Étude des courbes paramétrées du plan	
Étude locale en un point régulier ou stationnaire, tangente et position relative. Définition géométrique des points d'inflexion et de rebroussement.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements limités pour les études locales.
Branches infinies.	Asymptotes, branches paraboliques. Les étudiants doivent savoir utiliser des développements asymptotiques pour étudier les branches infinies.
Support d'une courbe paramétrée.	Construction à partir de tableaux de variations.
d) Propriétés métriques d'une courbe plane	
Longueur d'une courbe paramétrée régulière. Abscisse curviligne, paramétrage par une abscisse curviligne pour une courbe régulière. Repère de Frenet $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$, normale.	Définition par la formule intégrale.
Courbure en un point régulier, formules de Frenet.	La courbure est définie par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$. Interprétation géométrique du signe de la courbure. La formule donnant la courbure à partir du déterminant de la vitesse et de l'accélération est hors programme.
Expression $\overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath}$.	Les problèmes liés à la régularité de α ne sont pas un attendu du programme.
Expression de la courbure $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.	On interprète géométriquement la valeur de $\lvert\gamma\rvert$ sans démonstration formelle.
Point birégulier d'une courbe de classe $\mathscr{C}^2$. Rayon de courbure en un point birégulier. Centre de courbure. Cercle de courbure. Développée d'une courbe birégulière : ensemble des centres de courbure.	On interprète géométriquement le rayon et le cercle de courbure sans démonstration formelle.
e) Enveloppe d'une famille de droites	
Enveloppe d'une famille de droites données par une représentation paramétrique $t \mapsto A(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$ où A et $\overrightarrow{u}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$: on cherche une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $t \mapsto A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée par $\overrightarrow{u}(t)$. Caractérisation de la développée comme enveloppe des normales.	L'objectif est de privilégier une vision géométrique de la notion d'enveloppe et du procédé permettant de l'obtenir.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Séries numériques

Cette partie étend l'étude des séries à termes positifs vue en première année à celle des séries à termes réels et complexes. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries à termes réels	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Théorème des séries alternées : si la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Encadrement de la somme.
b) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente.	Somme d'une série absolument convergente.
Pour (u_n) et (v_n) deux suites complexes : – si $\lvert u_n\rvert \leqslant \lvert v_n\rvert$ à partir d'un certain rang, la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$;	
– si $u_n = O(v_n)$, la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$;	Le résultat s'applique en particulier lorsque $u_n = o(v_n)$.
– si $u_n \sim v_n$, la convergence absolue de $\sum v_n$ équivaut à celle de $\sum u_n$.	
Règle de d'Alembert.	
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :
- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier la régularité de la somme dans le cas d'une variable réelle ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série entière de variable réelle, de variable complexe.	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme la borne supérieure dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Disque ouvert de convergence.	
Intervalle ouvert de convergence.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : – si $\lvert a_n\rvert \leqslant \lvert b_n\rvert$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$. Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être directement utilisée.

b) Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Fonction somme d'une série entière.	
Théorème de continuité : la fonction somme est continue sur son intervalle de définition.	La démonstration est hors programme. Cet énoncé contient le théorème d'Abel radial, qu'il est inutile de formaliser auprès des étudiants. En dehors de ce cadre, les études au bord de l'intervalle ouvert de convergence ne sont pas un attendu du programme.
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme. Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	La démonstration est hors programme.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est triple :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle qui n'est pas un segment ;*
- *énoncer dans un cadre plus général que celui des séries entières, un théorème d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si $\int_a^x f$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
b) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans vérifier les hypothèses dans les cas de changements de variable usuels.
c) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente.	
Une fonction f est dite intégrable sur I si elle est continue sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur I » et « l'intégrale $\int_I f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b (resp. en a) si $I = [a,b[$ (resp. $I =]a,b]$).

Contenus	Capacités & Commentaires
La convergence absolue implique la convergence.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Inégalité triangulaire.	La démonstration n'est pas exigible pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.	
Si f est continue, positive et intégrable sur I, et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Pour f et g fonctions continues sur $[a,+\infty[$: – si $\|f\| \leqslant \|g\|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f en $+\infty$. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f en $+\infty$. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g en $+\infty$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$.
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$;	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0^+ peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\|x-a\|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

d) Intégration terme à terme

Soit $S : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ intégrables telles que : $\forall t \in I,\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. Si la série $\sum \int_I \|f_n(t)\|\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors S est intégrable sur I et : $$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.

e) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par rapport à t.

Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\|f(x,t)\| \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	La démonstration est hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilités, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes, la notion de variable à densité est hors programme.

En première année, les étudiants se sont familiarisés avec les sommes finies, en particulier les sommes doubles. Dans le cadre du programme, la définition de l'espérance et le théorème de transfert font appel à la convergence absolue de familles décrites en extension.

Dans la pratique, lorsque $X(\Omega)$ n'est pas présenté sous la forme $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, on utilise les résultats suivants démontrés dans le cas fini :

- *on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente est indépendante de l'ordre de sommation et d'un choix de regroupement de termes par paquets ;*
- *on étend les définitions et propositions du programme dans le cas où les sommes mises en jeu sont indexées sur un produit, sans soulever de difficulté. Le théorème de Fubini est admis.*

L'usage de ces résultats est strictement réservé au contexte probabiliste et la notion de famille sommable est hors programme.

A - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble fini ou dénombrable est dit au plus dénombrable.	Les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables. Un ensemble est au plus dénombrable s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i,\ i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et les x_i distincts.
Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
c) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité. Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
d) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_n$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$. On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	
e) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Contenus	Capacités & Commentaires
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation de la loi de Poisson comme la loi des événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
f) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\vert B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
g) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par : $$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une telle suite. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle	
Variable aléatoire X à valeurs réelles d'espérance finie, espérance de X.	La variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_n \vert n \in \mathbb{N}\}$ est d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, la somme de cette série est l'espérance de X. Variable aléatoire centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égalité : $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_n \vert n \in \mathbb{N}\}$ et si f est définie sur cet ensemble et à valeurs réelles, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.	La démonstration est hors programme. On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Linéarité de l'espérance.	La démonstration est hors programme.
Positivité, croissance de l'espérance.	
Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.	La démonstration est hors programme.
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	La démonstration est hors programme. Extension au cas de n variables aléatoires.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, XY aussi et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable aléatoire réduite. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux décorrélées.	

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t)=\mathrm{E}\left(t^X\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)\,t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X)=G_X{}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon>0$, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$ où $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $m=\mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration. Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma=\sigma(X_1)$: $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right)\leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Équations différentielles et calcul différentiel

A - Équations différentielles scalaires d'ordre 2

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres 1 et 2, abordée en première année, se poursuit par celle des équations scalaires à coefficients non constants d'ordre 2. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :

- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *la résolution explicite.*

Cette section favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensemble des solutions	
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	Équation différentielle homogène associée.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration est hors programme.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition des solutions. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
b) Exemples de résolutions	
Exemples de recherches de solutions développables en série entière. Résolution dans le cas où on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.

B - Fonctions de deux ou trois variables

Cette section est consacrée aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ pour $p = 2$ ou 3, sauf dans le paragraphe (g). Leur étude est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie.
La notion de différentielle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Topologie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	
Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.	Interprétation de la norme en termes de distance.
Boule ouverte, boule fermée.	
Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées.	Toutes les définitions sont illustrées par des figures.
Point intérieur, point adhérent à une partie.	
b) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent.	
Continuité en un point. Continuité sur une partie.	La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme. Si f est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Opérations sur les fonctions continues.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.

c) Dérivées partielles d'ordre 1

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par l'existence et la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Les démonstrations sont hors programme.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	La démonstration est hors programme.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Notation ∇f.

d) Dérivées partielles et composées

Dérivée selon un vecteur.	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(a), u\rangle$.
Règle de la chaîne : dérivée de la fonction $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_p(t))$.	Interprétation comme dérivée le long d'une courbe γ donnée par $\gamma(t) = (x_1(t),\cdots,x_p(t))$ et expression à l'aide du gradient : $(f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u,v) \mapsto f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$.	

e) Dérivées partielles d'ordre 2

Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur.	Notation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme. Exemples simples de résolutions d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordres.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Point critique d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Extremum local, extremum global. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^2$.	La démonstration est hors programme.
Nature d'un point critique.	Classification à l'aide du déterminant et de la trace de la matrice hessienne. Exemples de recherche de maximums ou minimums locaux, de points cols. Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

g) Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ ($p \leqslant 3$, $n \leqslant 3$)

Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}^p$.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Dérivées partielles d'ordres 1 et 2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.	Expression coordonnée par coordonnée.

Courbes et surfaces

En application directe de la section sur les fonctions de deux ou trois variables, on présente la définition des courbes de $\mathbb{R}^2$ et surfaces de $\mathbb{R}^3$ par une équation cartésienne. Le passage (dans les deux sens) d'une équation cartésienne à un paramétrage peut être étudié sur des exemples, mais le cas général est hors programme.

A - Courbes implicites du plan

Les coniques sont définies à partir de foyer, excentricité et directrice, puis ramenées à leurs équations cartésiennes réduites (le théorème spectral pour les matrices symétriques est exploité pour obtenir une équation réduite à partir d'une équation générale). D'autres définitions géométriques (bifocale, par foyer et cercle directeur, comme sections planes de cônes de révolution...) peuvent être présentées, mais aucune connaissance n'est attendue des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Courbes du plan définies par une équation cartésienne	
Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Lignes de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier.	On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
b) Coniques	
Définition des coniques par foyer, directrice et excentricité. Classification des coniques en fonction de l'excentricité, à partir d'une équation réduite.	Obtention d'une équation cartésienne réduite à partir de la définition géométrique. Les formules de calcul des éléments géométriques ne sont pas exigibles des étudiants et doivent être fournies au besoin.
Axes et centre de symétrie. Grand axe et petit axe d'une ellipse. Asymptotes d'une hyperbole.	Détermination de ces éléments géométriques à partir d'une équation réduite.
Une équation du type $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, définit une conique, éventuellement dégénérée.	Réduction de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pour obtenir une équation réduite dans un repère orthonormé. Interprétation géométrique des droites propres. L'équation $xy = k$ définit une hyperbole dont les asymptotes sont les axes du repère.
Paramétrage des ellipses et des hyperboles à partir de leur centre, respectivement par les fonctions trigonométriques et hyperboliques.	Dans le cas de l'hyperbole, les deux branches sont paramétrées séparément.

B - Surfaces

La visualisation des surfaces grâce à un outil informatique ou par l'étude de sections planes sont privilégiées. Les exemples peuvent être choisis parmi les quadriques, mais la définition et la classification de celles-ci sont hors programme. De la même façon, l'étude des surfaces réglées peut s'appuyer sur des exemples usuels (cônes, cylindres, surfaces développables engendrées par les tangentes à une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$...) mais toute connaissance spécifique est hors programme. Toujours dans cet esprit, on peut fournir divers exemples de courbes tracées sur une surface (lignes de pente, contours apparents coniques ou cylindriques...). De manière générale, on attend des étudiants une certaine familiarité avec la représentation mathématique des surfaces en lien avec leurs propriétés géométriques (par exemple qu'ils sachent obtenir rapidement un paramétrage de surface réglée, une équation cartésienne de surface de révolution...) même si aucun point du programme ne précise théoriquement ces aspects.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Surfaces paramétrées	
Surface paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(u,v) \mapsto M(u,v)$.	
Point régulier d'une surface paramétrée.	
Courbes coordonnées d'une surface paramétrée.	
Plan tangent en un point régulier.	Par définition, le plan est dirigé par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées. Détermination d'une équation ou d'un paramétrage du plan tangent.
Vecteur normal à une surface en un point régulier, droite normale.	
b) Surfaces définies par une équation cartésienne	
Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$.	Surfaces de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal au plan tangent en un point régulier.	On admet que la surface admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation du plan tangent en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
Courbe paramétrée tracée sur une surface.	Cas d'une surface paramétrée, d'une surface définie par une équation cartésienne.
Si Γ est une courbe tracée sur la surface Σ, et si M est un point régulier à la fois de Σ et de Γ, la tangente en M à Γ est incluse dans le plan tangent en M à Σ.	
c) Exemples de surfaces	
Surface d'équation $z=f(x,y)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Interprétation géométrique de l'étude des points critiques de f effectuée dans la section « Fonctions de deux ou trois variables ».
Surface réglée. Génératrices.	Obtention d'un paramétrage d'une surface réglée à partir de la famille de ses génératrices. Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point.
Surface de révolution. Axe, méridiennes, parallèles.	Dans le cas où l'axe est l'un des axes du repère, obtention d'un paramétrage ou d'une équation cartésienne. On met en évidence l'intérêt de l'utilisation de matrices de rotation.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

d) Courbes de l'espace définies par un système d'équations cartésiennes

Courbe définie par l'intersection de deux surfaces données par une équation cartésienne. Un point M de la courbe définie par le système $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ est régulier si les gradients de f et g en M sont linéairement indépendants. Tangente en un point régulier.	
Cas des sections planes.	Lignes de niveau d'une surface. Sur des exemples, utilisation pour visualiser l'allure d'une surface.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et technologie (PT)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie PT

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de PT est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de PTSI. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

La seconde partie intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de six thèmes : « Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques », « Électronique », « Optique ondulatoire », « Électromagnétisme », « Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques » et « Aspects thermodynamique et cinétique de l'électrochimie ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise.
Certains items de cette seconde partie, identifiés **en caractères gras** dans la colonne « capacités exigibles », se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées, d'une part, au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes et, d'autre part, aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de PT.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur.

	- Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	    - présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	    - rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	    - utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;

- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de PT durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante du programme de PTSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de seconde année de PT.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Les activités expérimentales sur le thème de la chimie sont aussi l'occasion de consolider les savoir-faire de la classe de PTSI en particulier dans le domaine des solutions aqueuses.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de longueurs	
Faibles longueurs dans le domaine de l'optique.	Mesurer le déplacement du miroir mobile d'un interféromètre de Michelson. Mesurer une longueur à l'aide d'un oculaire à vis micrométrique.
2. Mesures de temps et de fréquences	
Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
3. Électricité	
Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel.
Montages utilisant un amplificateur linéaire intégré (ALI).	Identifier les limitations suivantes : saturation en tension, saturation en courant, vitesse de balayage, bande passante. Mettre en œuvre divers montages utilisant un ALI.
Électronique numérique.	Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.
Onde électromagnétique.	Mettre en œuvre un détecteur dans le domaine des ondes centimétriques.

4. Optique	
Analyse d'une lumière.	Identifier, à l'aide d'un polariseur, une onde polarisée rectilignement et déterminer sa direction de polarisation. Mesurer une longueur d'onde à l'aide d'un goniomètre équipé d'un réseau.
Analyse d'une figure d'interférence.	Mettre en œuvre un photodétecteur en sortie d'un interféromètre.
Cohérence temporelle d'une source.	Régler un interféromètre de Michelson compensé pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole fourni. Obtenir une estimation de la longueur de cohérence d'une source et de l'écart spectral d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air.
5. Thermodynamique	
Conduction thermique.	Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique.
6. Thermodynamique de la transformation chimique et électrochimie	
Bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie. Déterminer la valeur en eau d'un calorimètre. Estimer les fuites thermiques lors d'expériences réalisées avec un calorimètre.
Mesures de grandeurs électriques : conductance-conductivité, tension électrique, intensité du courant.	Mettre en œuvre des mesures électriques dans un environnement chimique et électrochimique.
Électrochimie.	Mettre en œuvre un dispositif à trois électrodes pour tracer des courbes courant-potentiel. Mettre en œuvre des piles et des électrolyseurs.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire.

	Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
2. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de six thèmes.

1. Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

1.1. Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen
1.2. Expression différentielle des principes de la thermodynamique
1.3. Diagrammes d'état des fluides réels purs
1.4. Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite
1.5. Énergétique des fluides en écoulement dans une conduite
1.6. Thermodynamique industrielle
1.7. Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes.

2. Électronique

2.1. Stabilité des systèmes linéaires
2.2. Rétroaction
2.3. Oscillateurs
2.4. Électronique numérique

3. Optique ondulatoire

3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses

1. Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

Cette partie du programme de la classe de PT s'intéresse aux phénomènes liés à l'écoulement d'un fluide et à la conduction thermique dans les machines thermiques. Elle est essentiellement abordée à travers la mise en œuvre de bilans d'énergie. Elle prolonge le programme de thermodynamique de la classe de PTSI en introduisant le formalisme de la thermodynamique différentielle.
Les principes de la thermodynamique pour un système fermé sont repris sous forme infinitésimale. Les identités thermodynamiques sont introduites dans le but d'établir et de comprendre les allures des courbes dans les diagrammes thermodynamiques ; il ne s'agit pas de les exploiter pour retrouver les expressions des fonctions d'état, ces dernières devant toujours être fournies. L'application des deux principes aux fluides en écoulement stationnaire dans les systèmes ouverts conduit ensuite à l'analyse de quelques systèmes industriels.
On introduit également en classe de PT des notions de base de mécanique des fluides. L'objectif est de décrire les écoulements simples de fluides dans les machines thermiques en évoquant les phénomènes de perte de charge et le rôle de la viscosité. L'approche se fonde exclusivement sur la notion de bilan macroscopique : toute formulation locale de la mécanique des fluides, notamment à l'aide d'opérateurs vectoriels, est exclue. Enfin, on aborde la conduction thermique à l'aide de bilans infinitésimaux, la loi de Newton étant introduite pour faire le lien avec la thermodynamique industrielle.

La partie « **Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen** » introduit sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage. La poussée d'Archimède est présentée comme la résultante des forces de pression.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen	
Forces surfaciques, forces volumiques. Champ de pression.	Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir la relation entre la dérivée de la pression, la masse volumique, et le champ de pesanteur. Établir l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait. Comparer les variations de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère.
Résultante de forces de pression. Poussée d'Archimède.	Exprimer la force de pression sur une surface élémentaire en fonction de la pression. Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adapté. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Exprimer une résultante de forces de pression sur une paroi ou sur un objet immergé.

La partie « **Expression différentielle des principes de la thermodynamique** » présente les principes de la thermodynamique sous forme différentielle. Dans le but d'unifier la présentation en physique et en chimie, les identités thermodynamiques sont introduites dans le cas d'un système de composition variable. Toute étude générale de la notion de potentiel thermodynamique est hors-programme.
Pour une grandeur extensive A, on note a la grandeur massique associée et A_m la grandeur molaire associée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Expression différentielle des principes de la thermodynamique	
Échelle mésoscopique, transformation infinitésimale.	Découper un système en sous-systèmes élémentaires. Découper une transformation finie en une succession de transformations infinitésimales.
Premier principe pour une transformation infinitésimale d'un système fermé. Deuxième principe pour une transformation infinitésimale d'un système fermé.	Appliquer les principes pour obtenir une équation différentielle relative au système considéré.
Potentiel thermodynamique. Fonction enthalpie libre G.	Justifier que G est un potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Identités thermodynamiques pour un système fermé de composition variable. Potentiel chimique.	Citer les expressions des différentielles de U, H, G. Définir la température thermodynamique, la pression thermodynamique et le potentiel chimique. Distinguer les caractères intensif ou extensif des variables utilisées. Écrire les principes et les identités thermodynamiques par unité de masse du système. Exprimer l'enthalpie libre d'un système chimique en fonction des potentiels chimiques.
Système fermé de composition constante.	Exprimer les identités thermodynamiques.

L'étude des « **Diagrammes d'état des fluides réels purs** » est l'occasion de réinvestir les notions de thermodynamique différentielle. On y exploite également des diagrammes et tables de fluides réels afin d'habituer les étudiants à ne pas se limiter à des situations « idéales » (gaz parfait, etc.).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Diagrammes d'état des fluides réels purs	
Notion de phase.	Définir et dénombrer les phases d'un système physico-chimique.
Évolution et équilibre d'un corps pur lors d'un changement d'état isotherme.	Écrire et utiliser les conditions d'évolution et d'équilibre en termes de potentiel chimique. Justifier le caractère isobare d'un changement d'état isotherme.
Enthalpie et entropie de changement d'état.	Citer l'ordre de grandeur de l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau. Calculer l'énergie récupérable par transfert thermique lors d'une liquéfaction isobare. Relier l'entropie de changement d'état à l'enthalpie de changement d'état.
Titre massique.	Utiliser la règle des moments.
Diagrammes de Clapeyron (P,v), entropique (T,s), de Mollier (h,s) et des frigoristes (log P,h).	Représenter, pour chaque diagramme, l'allure des courbes isothermes, isobares, isentropiques et isenthalpiques. Établir l'équation de ces courbes dans la limite du gaz parfait et dans celle du liquide incompressible et indilatable. Exploiter un diagramme pour déterminer la valeur d'une grandeur physique.
Tables thermodynamiques.	Exploiter les tables thermodynamiques pour calculer des grandeurs physiques dans le domaine diphasique, ou pour prévoir l'état physique d'un fluide.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

La partie « **Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite** » introduit le point de vue eulérien pour l'étude des écoulements. Il s'agit de décrire simplement un écoulement en identifiant des tubes de courant sur lesquels des bilans peuvent ensuite être effectués.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite	
Grandeurs eulériennes. Régime stationnaire.	Décrire localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs intensives pertinentes.
Lignes et tubes de courant. Débit massique.	Exprimer le débit massique. Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
Débit volumique.	Justifier l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide de volume massique uniforme en écoulement.
Écoulements laminaires et turbulents. Nombre de Reynolds.	Relier le régime d'écoulement au nombre de Reynolds.

Dans la partie « **Énergétique des fluides en écoulement dans une conduite** », on effectue des bilans énergétiques dans une conduite. On se place dans un premier temps dans le cadre de la dynamique des fluides parfaits. Toute utilisation de l'équation d'Euler ou de Navier-Stokes est exclue. La relation de Bernoulli est établie. Les pertes de charge dans les conduites sont ensuite prises en compte et, dans ce cadre, les étudiants sont initiés à la lecture d'abaques. Enfin, les transferts thermiques sont pris en compte afin d'exprimer les principes de la thermodynamique pour un système en écoulement.

1.5. Énergétique des fluides en écoulement dans une conduite	
Fluides parfaits. Fluides newtoniens : notion de viscosité.	Citer des ordres de grandeur de viscosité dynamique de gaz et de liquides (air, eau et lubrifiant). Relier l'expression de la force surfacique de cisaillement au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Exploiter les conditions aux limites du champ de vitesse d'un fluide dans une conduite.
Relation de Bernoulli.	Définir un volume et une surface de contrôle. Établir et exploiter la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible en écoulement stationnaire.
Pertes de charges singulière et régulière. Bilan d'énergie.	Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie. Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe. **Mettre en évidence une perte de charge.**

Travail indiqué massique d'une machine.	Relier la notion de travail indiqué massique à la présence de parties mobiles.
Premier et deuxième principes pour un écoulement stationnaire unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie.	Établir et utiliser les premier et deuxième principes formulés avec des grandeurs massiques. Identifier les termes à négliger en fonction du contexte étudié. Relier l'entropie massique créée aux causes d'irréversibilité.
Systèmes à plusieurs entrées et sorties.	Exprimer la conservation du débit massique. Exprimer le premier principe en utilisant les puissances indiquée et thermique.

La partie « **Thermodynamique industrielle** » permet un approfondissement du cours de première année, par l'étude de cycles industriels. On se limite à des calculs relatifs au modèle du gaz parfait ou à l'utilisation des diagrammes d'état si le fluide est réel. Aucune connaissance relative à la technologie des installations ou aux différents types de cycles n'est exigible.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.6. Thermodynamique industrielle	
1.6.1. Étude de quelques dispositifs d'une installation industrielle	
Compresseur et turbine calorifugés.	Établir et exploiter la variation d'enthalpie massique pour une transformation réversible. Établir et exploiter la variation d'enthalpie massique pour une transformation irréversible, le rendement isentropique étant défini et fourni.
Mélangeur et séparateur isobares calorifugés.	Établir et exploiter les relations entre enthalpies et débits massiques.
Échangeur thermique calorifugé.	Établir et exploiter la relation entre les puissances thermiques reçues par les deux écoulements.
Détendeur calorifugé (laminage).	Établir et exploiter la nature isenthalpique de la transformation.
Tuyère calorifugée.	Établir la relation entre la vitesse de sortie des gaz et la variation d'enthalpie.
1.6.2. Cycles industriels	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Moteurs, réfrigérateurs, pompes à chaleur.	Repérer, pour une machine dont les éléments constitutifs sont donnés, les sources thermiques, le sens des échanges thermiques et mécaniques. Relier le fonctionnement d'une machine au sens de parcours du cycle dans un diagramme thermodynamique. Exploiter des diagrammes et des tables thermodynamiques pour déterminer les grandeurs thermodynamiques intéressantes. Définir et exprimer le rendement, l'efficacité ou le coefficient de performance de la machine. Citer des ordres de grandeur de puissances thermique et mécanique mises en jeu pour différentes tailles de dispositifs. Utiliser des documents ou des logiciels afin de discuter l'amélioration de cycles industriels : rôle du préchauffage, de la surchauffe, du choix du fluide.

La partie « **Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes** » aborde l'étude de la conduction thermique dans les solides. On se limite à l'étude de problèmes à une dimension en coordonnées cartésiennes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7 Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes.	
Vecteur densité de flux thermique.	Définir et algébriser le flux thermique échangé à travers une interface.
Loi de Fourier.	Lier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Utiliser la loi de Fourier. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique dans le domaine de l'habitat.
Bilan d'énergie.	Établir l'équation différentielle entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
Équation de la diffusion thermique sans terme source.	Établir l'équation de la diffusion thermique. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la

	méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton.	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs.

2. Électronique

Ce module renforce et complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « **Ondes et signaux** » du programme de première année. Ainsi, les notions de filtrage et d'analyse spectrale sont réinvesties, en particulier dans les activités expérimentales. Le programme de deuxième année ajoute la rétroaction et le bouclage des systèmes linéaires dans le but d'aborder la stabilité, les oscillateurs et la réalisation de filtres actifs.

Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré (ALI) dont l'étude n'est pas une fin en soi mais un outil permettant des réalisations expérimentales variées. Par ailleurs, des exemples de manifestations des non-linéarités sont abordés à l'occasion de la saturation d'un amplificateur ou de la réalisation d'une fonction mémoire (comparateur à hystérésis).

Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :

- la conversion analogique numérique ;
- l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
- le filtrage numérique.

La partie « **Stabilité des systèmes linéaires** » s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont reprises. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à l'équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
Stabilité.	Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

La partie « **Rétroaction** » illustre quelques propriétés relatives à la rétroaction sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré. L'étude des circuits est strictement limitée à des situations pouvant être facilement abordées avec les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension). La vitesse limite de balayage de l'ALI est évoquée en travaux pratiques afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire du système étudié. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Rétroaction	
Modèle de l'ALI défini par des courants de polarisation nuls, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse. Modéliser un ALI fonctionnant en régime linéaire à l'aide d'un schéma bloc.
Limites du modèle : vitesse limite de balayage, saturation de l'intensité du courant de sortie.	**Détecter, dans un montage à ALI, les manifestations de la vitesse limite de balayage et de la saturation de l'intensité du courant de sortie.**
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Analyser la stabilité du régime linéaire. Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur.
ALI idéal de gain infini en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de fonctionnement en régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension, de forte impédance d'entrée et de faible impédance de sortie.
ALI idéal de gain infini en régime saturé.	Établir la relation entrée-sortie du comparateur simple. Associer, pour une entrée sinusoïdale, le caractère non-linéaire du système et la génération d'harmoniques en sortie. Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Définir le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de mémoire.

La partie « **Oscillateurs** » s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les calculs des fonctions de transfert des filtres ne constituent pas un objectif de formation. En travaux pratiques, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Oscillateurs	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser, à partir de l'équation différentielle, l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non-linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. **Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et analyser les spectres des signaux générés.** Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler l'évolution temporelle d'un signal généré par un oscillateur.
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer l'expression de la période.
Générateur de signaux non sinusoïdaux.	**Mettre en œuvre un oscillateur de relaxation et analyser les spectres des signaux générés.**

La partie « **Électronique numérique** » est étudiée de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année.
Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement par exemple à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale.
Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction. Ce dernier est réalisé à l'aide d'une chaîne de traitement : CAN, algorithme numérique, CNA. On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Électronique numérique	
Échantillonnage.	**Mettre en évidence l'influence de la fréquence d'échantillonnage.**
Condition de Nyquist-Shannon.	Utiliser la condition de Nyquist-Shannon. **Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.**

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Analyse spectrale numérique.	**Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une d'acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.**
Filtrage numérique.	<u>Capacité numérique</u> : réaliser, à l'aide d'un langage de programmation, un filtrage numérique passe-bas d'un signal issu d'une acquisition et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.

3. Optique ondulatoire

Le programme d'optique ondulatoire de la classe de PT s'inscrit dans le prolongement de la partie « **Propagation d'un signal »** du thème « **Ondes et signaux** » du programme de la classe de PTSI. Il s'agit pour les étudiants d'approfondir l'étude des phénomènes d'interférences lumineuses, conséquences de la nature ondulatoire de la lumière.
Si le formalisme utilisé permet une modélisation précise des phénomènes décrits, il convient néanmoins de privilégier les aspects expérimentaux et d'utiliser tous les supports de visualisation (expériences de cours, simulations, animations, etc.) pour aider les étudiants dans la construction de leurs représentations. L'enseignant peut souligner que ces phénomènes, étudiés dans le cadre de l'optique, sont généralisables à tout comportement ondulatoire.
L'approche expérimentale est centrée sur la mise en œuvre des trous d'Young, de l'interféromètre de Michelson compensé (parallélisme compensatrice/séparatrice préréglé) et de dispositifs d'interférences à N ondes.

La partie « **Modèle scalaire des ondes lumineuses** » introduit les outils nécessaires pour décrire les phénomènes d'interférences. Le programme utilise le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut utiliser indifféremment les mots « intensité » ou « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau. L'intensité lumineuse est introduite comme une puissance par unité de surface. Le théorème de Malus (orthogonalité des rayons de lumière et des surfaces d'ondes) est admis.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses	
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique.	Utiliser une grandeur scalaire pour décrire un signal lumineux.
Chemin optique. Déphasage dû à la propagation. Surfaces d'ondes. Théorème de Malus (admis).	Exprimer le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique.
Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Associer une description de la formation des images en termes de rayon de lumière et de surfaces d'onde. Utiliser la propriété énonçant que le chemin optique séparant deux points conjugués est indépendant du rayon de lumière choisi.

Modèle d'émission. Relation (admise) entre le temps de cohérence et la largeur spectrale.	Citer l'ordre de grandeur du temps de cohérence Δt de quelques sources de lumière. Utiliser la relation $\Delta f.\ \Delta t \approx 1$ pour lier la durée des trains d'ondes et la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la source.
Détecteurs. Intensité lumineuse.	Relier l'intensité lumineuse à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire optique. Citer l'ordre de grandeur du temps d'intégration de quelques capteurs optiques. **Mettre en œuvre une expérience utilisant un capteur photographique numérique.**

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », la formule de Fresnel, admise en classe de première année, est démontrée. L'étude de la superposition de N ondes cohérentes ne doit pas donner lieu à des développements calculatoires.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition d'ondes incohérentes entre elles.	Justifier et exploiter l'additivité des intensités.
Superposition de deux ondes cohérentes entre elles : formule de Fresnel. Facteur de contraste.	Vérifier que les principales conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse (égalité des pulsations et déphasage constant dans le temps) sont réunies. Établir et exploiter la formule de Fresnel. Associer un bon contraste à des intensités voisines.
Superposition de N ondes cohérentes, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique. Réseau par transmission.	Établir l'expression de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. Établir la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à la valeur de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un phénomène d'interférences à N ondes.** **Relier qualitativement le nombre de traits d'un réseau à la largeur des franges brillantes.**

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young** », les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'Young peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	
Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source à distance finie et observation à grande distance finie. Ordre d'interférences.	Exprimer et utiliser l'ordre d'interférences. **Mettre en œuvre une expérience d'interférences : trous d'Young ou fentes d'Young.** **Montrer la non-localisation des franges d'interférences.**
Franges d'interférences. Interfrange.	Justifier la forme des franges observées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position ou la longueur d'onde de la source ; perte de contraste par élargissement spatial ou spectral de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges pour interpréter des observations expérimentales.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson** », l'étude de l'interféromètre de Michelson en lame d'air permet de confronter théorie et expérience. L'étude de l'interféromètre de Michelson en coin d'air est abordée de manière exclusivement expérimentale. Pour la modélisation d'un interféromètre de Michelson, on suppose la séparatrice infiniment mince.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson	
Interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue. Localisation (admise) des franges.	Citer les conditions d'éclairage et d'observation en lame d'air et en coin d'air.
Lame d'air : franges d'égale inclinaison.	Établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférence en fonction de la longueur d'onde, de l'épaisseur de la lame d'air équivalente et de l'angle d'inclinaison des rayons. **Régler un interféromètre de Michelson compensé pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole fourni.** **Mettre en œuvre un protocole pour accéder à l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence d'une raie et à l'écart spectral d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**
Coin d'air : franges d'égale épaisseur.	Utiliser l'expression admise de la différence de marche en fonction de l'épaisseur. **Caractériser la géométrie d'un objet ou l'indice d'un milieu à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

	Interpréter qualitativement les observations en lumière blanche.

4. Électromagnétisme

Le programme d'électromagnétisme de la classe de PT s'inscrit dans le prolongement des parties « **Propagation d'un signal** » et « **Induction et forces de Laplace** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PTSI. Il s'agit pour les étudiants de découvrir les lois locales et intégrales qui gouvernent les champs électrique et magnétique et des applications dans des domaines variés.
Si certaines notions ont été abordées en classe de première année de PTSI, le formalisme utilisé constitue bien souvent pour les étudiants une première découverte ; il convient pour l'enseignant d'être particulièrement attentif aux difficultés potentielles des étudiants et d'utiliser tous les outils de visualisation (expériences de cours, simulations, animations, etc.) pour aider les étudiants dans la construction de leurs représentations.
L'étude des champs électrostatique et magnétostatique est présentée en deux parties distinctes ; l'enseignant est libre, s'il le souhaite, de procéder à une présentation unifiée de la notion de champ statique. Pour les calculs de champs, l'accent est mis sur les situations à haut degré de symétrie qui permettent l'utilisation efficace des propriétés de flux ou de circulation. Les équations locales des champs statiques sont introduites comme cas particuliers des équations de Maxwell.
La loi de Biot et Savart et la notion de potentiel vecteur ne relèvent pas du programme. Les relations de passage relatives au champ électromagnétique peuvent être exploitées, mais doivent être systématiquement fournies en cas de besoin.
Après une présentation des équations de Maxwell et des aspects énergétiques, le programme analyse le phénomène de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, la structure des champs associés et la réflexion des ondes sur un conducteur parfait. La propagation dans les milieux est abordée en se limitant à l'étude d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique et dans un guide d'onde modélisé par deux plans infinis.

Les notions abordées la partie « **Électrostatique** » sont centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. Pour le champ électrique et le potentiel, on se limite aux expressions explicites dans le cas de charges ponctuelles et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues.
L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie.
Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées. Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme. Une approche énergétique est conduite dans le cas d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrique extérieur. Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Distributions continues de charges volumique, surfacique, linéique.	Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition. Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Justifier qualitativement le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution infinie. Évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométries simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrostatique.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Systèmes modélisés par une sphère, un cylindre infini et du plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et exploiter qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
Condensateur plan modélisé par la superposition de deux distributions surfaciques infinies de charges opposées.	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ du champ électrostatique créé par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer, en dehors des sources, les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, tracer quelques lignes de champ et lignes équipotentielles pour une distribution donnée.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Champ de gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss dans le cas de la gravitation.

L'étude de la magnétostatique menée dans la partie « **Magnétostatique** » s'appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de PTSI ; les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue.
Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.
On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d'Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.2. Magnétostatique	
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumique et linéique.	Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique. Utiliser une méthode de superposition. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini.	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ du champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

Dans la partie « **Équations de Maxwell** », une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée. Elle constitue une première approche quantitative du phénomène de propagation et permet également de revenir qualitativement sur l'induction étudiée en classe de première année de PTSI.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Équations de Maxwell	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge dans le cas à une dimension. Citer l'équation locale de la conservation de la charge à l'aide de l'opérateur divergence.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Relier qualitativement le couplage spatiotemporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Déduire l'équation locale de la conservation de la charge.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique.	Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.

Dans la partie « **Énergie du champ électromagnétique** », on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.4. Énergie du champ électromagnétique	
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; effet Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant donnée.

La partie « **Propagation** », articulée autour des ondes électromagnétiques, est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.
Si le modèle de l'onde plane est présenté dans le cadre de l'espace vide de courant et de charge, l'étude des ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique permet d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant l'effet de peau.
La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'aborder la notion d'onde stationnaire et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude efficace. La notion de densité de courant surfacique est introduite, mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5. Propagation	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive
États de polarisation d'une onde plane progressive et monochromatique : polarisation rectiligne. Polariseurs.	Reconnaître une onde plane polarisée rectilignement. **Mettre en évidence une polarisation rectiligne.**
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique dans le cadre de l'ARQS magnétique. Effet de peau.	Établir et interpréter l'expression de la grandeur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Exploiter la nullité (admise) des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Modes d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. **Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques.**

5. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques

Les transformations chimiques de la matière ont été abordées en classe de PTSI ; le critère d'évolution spontanée d'un système chimique en transformation y a été présenté sans être démontré. Ce dernier a été remobilisé lors de l'étude des transformations chimiques en solution aqueuse.
Le but de cette partie est d'une part d'aborder les transferts thermiques et d'autre part d'établir puis exploiter le critère d'évolution spontanée d'un système engagé dans une transformation physico-chimique.

Dans la partie « **Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », l'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif aux transformations physiques du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.
Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, pouvoirs calorifiques des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
État standard. Enthalpie standard de réaction. Loi de Hess. Enthalpie standard de formation, état standard de référence d'un élément.	Déterminer l'enthalpie standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques. Associer le signe de l'enthalpie standard de réaction au caractère endothermique ou exothermique de la réaction.
Effets thermiques pour une transformation monobare : - transfert thermique associé à la transformation chimique en réacteur monobare, isotherme ; - variation de température en réacteur adiabatique, monobare.	Prévoir, à partir de données thermodynamiques, le sens et une estimation de la valeur du transfert thermique entre un système, siège d'une transformation physico-chimique, et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation chimique supposée monobare et réalisée dans un réacteur adiabatique. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'évolution temporelle de la température pour un système siège d'une transformation adiabatique modélisée par une seule réaction chimique dont les caractéristiques cinétiques et l'enthalpie standard de réaction sont données. **Déterminer une enthalpie standard de réaction.**

La fonction enthalpie libre G et la notion de potentiel chimique ont été introduites dans la partie « **Expression différentielle des principes de la thermodynamique** ». Dans la partie « **Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », on adopte pour les potentiels chimiques une expression générale :
$\mu_i = \mu_{iréf} + RT\ln(a_i)$ qui fait référence aux activités a_i introduites en première année.
L'établissement de cette expression est hors programme. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'un constituant en phase condensée pure n'est pas abordée. On se limite aux cas d'une espèce chimique pure, d'une espèce en solution aqueuse très diluée et d'une espèce en mélange de gaz parfaits avec référence à l'état standard.
Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température en dehors des changements d'états.
Les grandeurs standard de réaction permettent la détermination, à une température donnée, de la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre K° caractéristique d'une réaction, valeur qui était systématiquement donnée en première année. C'est ainsi l'occasion de revenir sur la détermination de la composition d'un système physico-chimique en fin d'évolution.

La notion d'affinité chimique n'est pas utilisée, le sens d'évolution spontanée d'un système hors d'équilibre, à température et pression fixées, est déterminé par le signe de l'enthalpie libre de réaction Δ_rG.
Enfin, l'étude de l'influence de la modification d'un paramètre (pression, température ou composition) sur un système chimique permet d'aborder la problématique de l'optimisation des conditions opératoires d'un procédé chimique.
Les illustrations et applications sont choisies dans le domaine industriel, dans la vie courante et au niveau du laboratoire.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
5.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
Enthalpie standard de réaction, entropie standard de réaction et grandeurs standard associées. Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction ; évolution d'un système chimique.	Justifier qualitativement ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction. Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à pression et température fixées. Prévoir le sens d'évolution à pression et température fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Déterminer les grandeurs standard de réaction à partir des tables de données thermodynamiques et de la loi de Hess. Déterminer les grandeurs standard de réaction d'une réaction dont l'équation est combinaison linéaire d'autres équations de réaction.

Constante thermodynamique d'équilibre ; relation de Van 't Hoff.	Citer et exploiter la relation de Van 't Hoff. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre à une température quelconque. **Déterminer l'évolution de la valeur d'une constante thermodynamique d'équilibre en fonction de la température.**
État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale.	Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique.
Optimisation thermodynamique d'un procédé chimique : - par modification de la valeur de K° ; - par modification de la valeur du quotient de réaction.	Identifier les paramètres d'influence et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.

6. Aspects thermodynamique et cinétique de l'électrochimie

Les aspects thermodynamiques et cinétiques des réactions d'oxydo-réduction sont appliqués notamment à la corrosion d'une part et aux dispositifs électrochimiques que sont les piles et les accumulateurs d'autre part. L'illustration des notions gagne à s'appuyer sur des applications concrètes comme par exemple la mise en œuvre de capteurs électrochimiques dans l'analyse de l'eau, de l'air ou d'effluents.
L'approche de l'électrochimie proposée privilégie les raisonnements qualitatifs et les aspects expérimentaux, plutôt que les développements théoriques et formels.

La partie « **Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction** » se fonde sur les acquis de première année relatifs à l'étude des réactions d'oxydo-réduction et des piles, ainsi que sur la partie de thermodynamique chimique de seconde année pour relier les grandeurs thermodynamiques aux potentiels et potentiels standard.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.1. Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction	
Relation entre enthalpie libre de réaction et potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.	Citer et exploiter la relation entre l'enthalpie libre de réaction et les potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.
Relation entre enthalpie libre standard de réaction et potentiels standard des couples impliqués.	Déterminer l'enthalpie libre standard d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. Déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple d'oxydo-réduction à partir de données thermodynamiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

La partie « **Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel** » se fonde sur les acquis de cinétique chimique de première année et les prolongent par le tracé et l'exploitation de courbes courant-potentiel.
Les courbes courant-potentiel, dont le tracé est proposé en capacité expérimentale, sont un outil essentiel dans la compréhension et la modélisation des systèmes électrochimiques.
L'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre est appelé surpotentiel plutôt que surtension pour des raisons pédagogiques, en cohérence avec le vocabulaire anglo-saxon correspondant.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.2. Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel	
Courbes courant-potentiel sur une électrode en régime stationnaire : - surpotentiel ; - systèmes rapides et systèmes lents ; - nature de l'électrode ; - courant de diffusion limite ; - vagues successives ; - domaine d'inertie électrochimique du solvant.	Décrire le montage à trois électrodes permettant de tracer des courbes courant-potentiel. Relier vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Identifier le caractère lent ou rapide d'un système à partir des courbes courant-potentiel. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. Relier qualitativement ou quantitativement, à partir de relevés expérimentaux, l'intensité du courant de diffusion limite à la concentration du réactif et à la surface immergée de l'électrode. Tracer l'allure de courbes courant-potentiel de branches d'oxydation ou de réduction à partir de données fournies, de potentiels standard, concentrations et surpotentiels. **Tracer et exploiter des courbes courant-potentiel.**

La partie « **Stockage et conversion d'énergie dans des dispositifs électrochimiques** » s'appuie sur les courbes courant-potentiel pour étudier le fonctionnement des piles et leur recharge, ainsi que les électrolyseurs. Ces courbes permettent de déterminer différentes caractéristiques : réactions aux électrodes, tension à vide, tension à imposer pour une recharge, etc.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.3. Stockage et conversion d'énergie chimique dans des dispositifs électrochimiques	
Conversion d'énergie chimique en énergie électrique : fonctionnement des piles.	
Transformations spontanées et réaction modélisant le fonctionnement d'une pile électrochimique.	Établir l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

	Relier la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de la réaction modélisant son fonctionnement. Déterminer la capacité électrique d'une pile.
Courbes courant-potentiel et fonctionnement d'une pile électrochimique.	Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'une pile électrochimique et tracer sa caractéristique. Citer les paramètres influençant la résistance interne d'une pile électrochimique.
Conversion d'énergie électrique en énergie chimique. Transformations forcées lors d'une électrolyse et de la recharge d'un accumulateur.	 Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'un électrolyseur et prévoir la valeur de la tension minimale à imposer. Exploiter les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes (purification de la solution électrolytique, choix des électrodes) dans la recharge d'un accumulateur. Déterminer la masse de produit formé pour une durée et des conditions données d'électrolyse. Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié.
Stockage et conversion d'énergie chimique.	**Étudier le fonctionnement d'une pile ou d'un électrolyseur pour effectuer des bilans de matière et des bilans électriques.**

La lutte contre la corrosion est un enjeu économique actuel et la compréhension des phénomènes de corrosion et des facteurs influençant cette corrosion est essentielle pour effectuer des choix de méthodes de protection. La partie « **Corrosion humide ou électrochimique** » exploite les courbes courant-potentiel pour interpréter les phénomènes de corrosion, de protection et de passivation. On se limite à la corrosion uniforme et à la corrosion galvanique de deux métaux en contact. Les tracés de diagrammes de Tafel ou d'Evans sont hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.4. Corrosion humide ou électrochimique	
Corrosion uniforme en milieu acide ou en milieu neutre oxygéné : potentiel de corrosion, courant de corrosion. Corrosion d'un système de deux métaux en contact.	Positionner un potentiel de corrosion sur un tracé de courbes courant-potentiel. Interpréter le phénomène de corrosion uniforme d'un métal ou de deux métaux en contact en utilisant des courbes courant-potentiel ou d'autres données

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

	expérimentales, thermodynamiques et cinétiques. Citer des facteurs favorisant la corrosion.
Protection contre la corrosion : - revêtement ; - anode sacrificielle ; - protection électrochimique par courant imposé.	Exploiter des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement : - la qualité de la protection par un revêtement métallique ; - le fonctionnement d'une anode sacrificielle.
Passivation.	Interpréter le phénomène de passivation sur une courbe courant-potentiel. **Mettre en en évidence le phénomène de corrosion et de protection et les facteurs l'influençant.**

Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique-chimie de PTSI. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une aide.

1. Domaine optique

- Polariseur.
- Interféromètre de Michelson motorisé.
- Capteur photographique numérique.
- Spectromètre à fibre optique.

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre.
- Carte d'acquisition dont l'API est publiée.
- Microcontrôleur.
- Émetteur et récepteur dans le domaine des ondes centimétriques.

3. Domaine de la chimie

- Calorimètre.
- Électrode de référence.
- Électrolyseur et électrodes.

Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de PT sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de PTSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'outil « gradient » abordé en première année, en introduisant de nouveaux opérateurs : seules les expressions des opérateurs en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en PTSI et réutilisée en classe de PT. On étend la décomposition d'un signal périodique comme somme de ses harmoniques à l'expression d'un signal non périodique sous forme d'une intégrale (synthèse spectrale) ; aucun résultat n'est exigible. On souligne en revanche la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent est mis sur le rôle des conditions aux limites.

Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles sont mobilisées principalement dans le cours de thermodynamique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse vectorielle	
Gradient.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$.
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}.\mathbf{r})$ ou à $\exp(i\mathbf{k}.\mathbf{r} - i\omega t)$.	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\mathbf{k}$.
2. Analyse de Fourier	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.
Synthèse spectrale d'un signal non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution connue dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
4. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle. Théorème de Schwarz.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclut l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et celui de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique-chimie de première année de la classe de PTSI.

Outils numériques	**Capacités exigibles**
Représentation graphique d'un champ scalaire ou vectoriel.	Utiliser les fonctions de base (**contour** et **streamplot**) de la bibliothèque **matplotlib** (leurs spécifications étant fournies) pour représenter des lignes de niveau ou des lignes de champ.
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.

Enseignements secondaire et supérieur

Classes préparatoires scientifiques

Objectifs de formation et programme des classes préparatoires de seconde année de physique et sciences de l'ingénieur (PSI) et de physique et sciences de l'ingénieur* (PSI*) : modification

NOR : ESRS2111748A
arrêté du 13-7-2021 - JO du 5-8-2021
MESRI - DGESIP A1-2 - MENJS - DGESCO - MOM

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; arrêté du 20-6-1996 modifié ; avis du Cneser du 8-6-2021 ; avis du CSE du 17-6-2021 ; avis de la ministre des Armées des 1er, 2, 5 et 6-7-2021

Article 1 - Les programmes de mathématiques, de physique et de chimie de seconde année de la classe préparatoire scientifique physique et sciences de l'ingénieur (PSI), annexés à l'arrêté du 20 juin 1996 susvisé, sont remplacés par les programmes de mathématiques et de physique-chimie figurant respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis et Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 4 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 13 juillet 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer, et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle, et par délégation,
La cheffe du service de la stratégie des formations et de la vie étudiante, adjointe à la directrice générale,
Isabelle Prat

Annexes

↳ *Programmes des classes préparatoires de seconde année de physique et sciences de l'ingénieur (PSI) et de physique et sciences de l'ingénieur* (PSI*)*

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classe préparatoire PSI
Programme de mathématiques

Table des matières

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :
- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la théorie des équations différentielles utilise des concepts et des résultats développés en algèbre linéaire ; le calcul différentiel et l'optimisation exploitent en outre les endomorphismes autoadjoints ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend deux sections. La première prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et combine les points de vue géométrique (éléments propres), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matriciel pour aboutir à une solide étude de la réduction : diagonalisation, trigonalisation. La deuxième, après quelques généralités sur les espaces préhilbertiens et le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, étudie, dans le cadre euclidien, les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints (théorème spectral), et introduit les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation.

La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, théorème des bornes atteintes pour les fonctions continues sur les fermés bornés, continuité des applications linéaires et polynomiales.
Après quelques compléments sur les séries numériques, la section sur les suites et séries de fonctions étudie divers modes de convergence et établit des résultats de régularité pour les limites de suites ou les sommes de séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.
Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires et pour les probabilités au travers des fonctions génératrices.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable.
Les théorèmes sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables en appui des notions générales de la théorie des probabilités, afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations différentielles est limitée au cas des équations linéaires d'ordre 2, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. Le programme permet aussi, en liaison avec la réduction, de traiter des exemples d'équations ou de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On donne quelques éléments sur la dérivabilité des fonctions vectorielles, les courbes paramétrées en fournissant une interprétation.

La section sur les fonctions de plusieurs variables est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie. Elle s'achève par une étude au second ordre des extremums qui s'appuie sur les matrices symétriques.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\operatorname{tr}(A)$.
Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Polynôme annulateur. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Application au calcul de l'inverse et des puissances. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;*
- *l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).*

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
c) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.	
e) Trigonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

A - Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme associée	
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples de référence :	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Expression $X^\top Y$. Expression $\mathrm{tr}(A^\top B)$.
Norme associée au produit scalaire.	Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\|u \pm v\|^2$, identité de polarisation).
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F, d'une partie X. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Bases orthonormées d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	Dimension de $F^{\perp}$ en dimension finie.
Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Les étudiants doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x, F)$.
Projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$; distance entre x et $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.	Application géométrique à des calculs de distances.
e) Formes linéaires sur un espace euclidien	
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	Vecteur normal à un hyperplan.

B - Endomorphismes d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion d'adjoint est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.	
c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte.	Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe.	
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	
d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3	
Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.	Axe et mesure de l'angle d'une rotation.
f) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathscr{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E)$, $\mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.
Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\Vert\ \Vert_1$, $\Vert\ \Vert_2$ et $\Vert\ \Vert_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\Vert\ \Vert_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie. Fermé d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque. Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
g) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Suites et séries de fonctions

A - Compléments sur les séries numériques

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors : $$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.	
c) Régularité de la somme d'une série de fonctions	
Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et : $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$	La démonstration est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

C - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolution d'équations différentielles linéaires.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Rayon de convergence	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Intervalle ouvert de convergence. Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$. Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être directement utilisée.

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
- *compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Notations $\int_a^{b} f$, $\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Contenus	Capacités & Commentaires
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I=[a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
Fonctions de référence : pour $\alpha\in\mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t\mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x\mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x\mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t\mapsto f(a+t)$ (resp. $t\mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert\leqslant\varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.
Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et : $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de continuité :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

Théorème de dérivation :
si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration n'est pas exigible.
En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*
- *les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

A - Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

Contenus	Capacités & Commentaires

b) Probabilité

Probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	Notation $P(A)$.
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	

d) Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$: $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \sim \mathscr{G}(p)$. Relation $P(X>k) = (1-p)^k$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

C - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$	On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.	X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Variable centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$	
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\Big(f(X)\Big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$	On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Linéarité de l'espérance. Si $\|X\| \leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n$.	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1,1]$. Continuité de G_X. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$: $P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.	Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$. Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$: $P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

Calcul différentiel

A - Équations différentielles linéaires scalaires

Contenus	Capacités & commentaires
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.

B - Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Contenus	Capacités & commentaires
Interprétation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ comme courbe paramétrée.	L'étude et le tracé d'arcs paramétrés sont hors programme.
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1,\dots,f_p$ à valeurs vectorielles.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.
Dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles. Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

C - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivée en un point selon un vecteur.	Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1. Différentielle de f en a.	La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω. Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $$\mathrm{d}f(a) : (h_1, \ldots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i.$$ Notation $\mathrm{d}f(a) \cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de : $$(u_1, \ldots, u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_n)\big).$$	Interprétation géométrique. En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Coordonnées du gradient.	Le gradient est défini par la relation $\mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ pour $h \in \mathbb{R}^p$. Notation $\nabla f(a)$.
d) Applications géométriques	
Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est de classe $\mathscr{C}^1$.	Lignes de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier.	On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ où f est de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Le plan tangent en un point régulier est défini comme orthogonal au gradient.	
Courbe tracée sur une surface.	Dans le cas d'une courbe régulière, la tangente à la courbe est incluse dans le plan tangent à la surface.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme.
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \mathrm{o}(\\|h\\|^2)$.	La démonstration est hors programme. Expression en termes de produit scalaire.
f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$	
Extremum local, global.	
Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique.	
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f : – si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ; – si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.	Adaptation à l'étude d'un maximum local. Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).
	Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et sciences de l'ingénieur (PSI)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique - chimie de la voie PSI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de PSI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de PCSI. Concernant la chimie, le programme de référence est celui de la classe de PCSI du semestre 1 à l'exception de la partie 2.3. intitulée « **Réactivité des espèces organiques et premières applications en synthèse** » ; il est complété par celui de la classe de PCSI option PSI du semestre 2. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »,** sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « Contenus thématiques » est structurée autour de huit thèmes : « Électronique », « Phénomènes de transport », « Bilans macroscopiques », « Électromagnétisme », « Conversion de puissance », « Physique des ondes », « Transformations de la matière : aspects thermodynamiques et cinétiques » et « Aspects thermodynamiques et cinétiques de l'électrochimie ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras** dans la colonne capacités exigibles, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de PSI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

	- Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	    o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	    o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	    o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique.**

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.
Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.
Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d’une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l’opérateur, à l’environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l’évaluation d’une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l’évaluation d’une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l’écart-type dans l’hypothèse d’une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l’incertitude-type d’une grandeur s’exprimant en fonction d’autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l’aide d’une somme, d’une différence, d’un produit ou d’un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l’évaluation d’une incertitude-type composée. Capacité numérique : simuler, à l’aide d’un langage de programmation ou d’un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d’une grandeur composée.
Écriture du résultat d’une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d’une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l’aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d’une éventuelle incompatibilité entre le résultat d’une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d’obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l’aide d’une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d’incertitude ou analyse des écarts normalisés. Capacité numérique : simuler, à l’aide d’un langage de programmation ou d’un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l’une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l’incertitude sur les paramètres du modèle.

© Ministère de l’enseignement supérieur, de la recherche et de l’innovation, 2021

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de PSI durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante du programme de PCSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de seconde année de PSI.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Les activités expérimentales sur le thème de la chimie sont aussi l'occasion de consolider les savoir-faire de la classe de PCSI en particulier dans le domaine des solutions aqueuses.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de temps et de fréquences	
Détection synchrone.	Mesurer une fréquence par une détection synchrone à l'aide d'un multiplieur et d'un filtre passe-bas adapté à la mesure.
Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
2. Électricité et électronique	
Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel.
Montages utilisant un amplificateur linéaire intégré (ALI).	Identifier les limitations suivantes : saturation en tension, saturation en courant, vitesse de balayage, bande passante. Mettre en œuvre divers montages utilisant un ALI.
Modulation et démodulation.	Élaborer un signal modulé en amplitude à l'aide d'un circuit multiplieur. Réaliser une démodulation synchrone.
Électronique numérique.	Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.
3. Conversion de puissance	
Puissance électrique.	Mesurer une puissance moyenne à l'aide d'un wattmètre numérique.

Conversion électromagnétique statique de puissance.	Mettre en œuvre un transformateur.
Conversion électromécanique de puissance.	Mettre en œuvre une machine à courant continu.
Conversion électronique statique de puissance.	Mettre en œuvre un convertisseur électronique statique.
4. Ondes	
Mesure d'une célérité.	Mesurer la célérité d'une onde par diverses méthodes : étude d'ondes progressives en propagation libre, étude d'ondes stationnaires.
Polarisation.	Mettre en œuvre un photorécepteur et plusieurs polariseurs.
5. Thermodynamique de la transformation chimique et électrochimie	
Bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie. Déterminer la valeur en eau d'un calorimètre. Estimer les fuites thermiques lors d'expériences réalisées avec un calorimètre.
Mesures de grandeurs électriques : conductance-conductivité, tension électrique, intensité du courant.	Mettre en œuvre des mesures électriques dans un environnement chimique et électrochimique.
Électrochimie.	Mettre en œuvre un dispositif à trois électrodes pour tracer des courbes courant-potentiel Mettre en œuvre des piles et des électrolyseurs.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leurs utilisations.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
2. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de huit thèmes.

1. Électronique
- 1.1. Stabilité des systèmes linéaires
- 1.2. Rétroaction
- 1.3. Oscillateurs
- 1.4. Électronique numérique
- 1.5. Modulation-démodulation

2. Phénomènes de transport
- 2.1. Transport de charge
- 2.2. Transfert thermique par conduction
- 2.3. Diffusion de particules
- 2.4. Fluides en écoulement

3. Bilans macroscopiques
- 3.1. Définition d'un système fermé pour les bilans macroscopiques
- 3.2. Bilans d'énergie
- 3.3. Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique

4. Électromagnétisme
- 4.1. Symétries des champs électrique et magnétique
- 4.2. Champ électrique en régime stationnaire
- 4.3. Condensateur
- 4.4. Champ magnétique en régime stationnaire
- 4.5. Électromagnétisme dans l'ARQS
- 4.6. Milieux ferromagnétiques

5. Conversion de puissance
- 5.1. Puissance électrique en régime sinusoïdal
- 5.2. Transformateur
- 5.3. Conversion électro-magnéto-mécanique
- 5.4. Conversion électronique statique

6. Physique des ondes
- 6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert
- 6.2. Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion
- 6.3. Interfaces entre deux milieux

7. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques et cinétiques
- 7.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
- 7.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
- 7.3. Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques

8. Aspects thermodynamiques et cinétiques de l'électrochimie
- 8.1. Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction
- 8.2. Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel
- 8.3. Stockage et conversion d'énergie dans des dispositifs électrochimiques.
- 8.4. Corrosion humide et électrochimique

1. Électronique

Cette partie renforce et complète l'étude des circuits électriques linéaires conduite dans le thème « **Ondes et signaux** » du programme de première année de la classe de PCSI. Ainsi, les notions de filtrage et d'analyse spectrale sont réinvesties, en particulier dans les activités expérimentales. Le programme de deuxième année ajoute la rétroaction et le bouclage des systèmes linéaires dans le but d'aborder la stabilité, les oscillateurs et la réalisation de filtres actifs à forte impédance d'entrée pour une association en cascade.
Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré ALI (également appelé amplificateur opérationnel) dont l'étude n'est pas une fin en soi mais un outil permettant des réalisations expérimentales variées.
Par ailleurs, des exemples de manifestations des non linéarités sont abordés à l'occasion de la saturation d'un amplificateur ou de la réalisation d'une fonction mémoire (comparateur à hystérésis).
Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :
- l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
- le filtrage numérique ;
- les conversions analogique/numérique et numérique/analogique.

Enfin, la problématique de la transmission d'un signal temporel codant une information est abordée dans l'étude et la réalisation d'une modulation, en relation avec la partie du programme consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques.

La partie « **Stabilité des systèmes linéaires** » s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont révisées sans ajout de nouvelles capacités. Dans le but de faciliter le lien avec le cours de sciences industrielles pour l'ingénieur, la notation symbolique de la fonction de transfert H(p) est utilisée sans faire référence à la transformée de Laplace. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à l'équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
Stabilité.	Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

La partie « **Rétroaction** » illustre quelques propriétés sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré. L'étude des circuits est strictement limitée à des situations pouvant être facilement abordées avec les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension). La vitesse limite de balayage de l'ALI est évoquée en travaux pratiques afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Rétroaction	
Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie. Limites du modèle : vitesse limite de balayage, saturation de l'intensité du courant de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse. **Détecter, dans un montage à ALI, les manifestations de la vitesse limite de balayage et de la saturation de l'intensité du courant de sortie.**
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Analyser la stabilité du régime linéaire. Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur.
ALI idéal de gain infini en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur et intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de forte impédance d'entrée et de faible impédance de sortie.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

ALI idéal de gain infini en régime saturé.	Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation. Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Associer, pour un signal d'entrée sinusoïdal, le caractère non-linéaire du système et la génération d'harmoniques en sortie. Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.

La partie « **Oscillateurs** » s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les calculs des fonctions de transfert des filtres ne constituent pas un objectif de formation. En travaux pratiques, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Oscillateurs	
Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non-linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. **Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et analyser les spectres des signaux générés.** <u>Capacité numérique</u> **:** à l'aide d'un langage de programmation, simuler l'évolution temporelle d'un signal généré par un oscillateur.
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis. Générateur de signaux non sinusoïdaux.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer l'expression de la période d'oscillation. **Mettre en œuvre un oscillateur de relaxation et analyser les spectres des signaux générés.**

La partie « **Électronique numérique** » est étudiée de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année.
Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement à l'aide par exemple d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction. Ce dernier est réalisé à l'aide d'une chaîne de traitement : CAN, algorithme numérique, CNA. On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Électronique numérique	
Échantillonnage.	**Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.**
Condition de Nyquist-Shannon.	Utiliser la condition de Nyquist-Shannon. **Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.**
Analyse spectrale numérique.	Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon. Capacité numérique : calculer, à l'aide d'un langage de programmation, la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique.
Filtrage numérique.	**Mettre en œuvre une chaîne d'acquisition et de conversion.** Capacité numérique : réaliser, à l'aide d'un langage de programmation, un filtrage numérique d'un signal issu d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.

La partie « **Modulation-démodulation** » est l'occasion de faire le lien entre la propagation des ondes électromagnétiques et le traitement du signal afin d'expliquer la problématique de la transmission d'une information. Cette étude est illustrée en travaux pratiques à l'aide d'un multiplieur analogique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.5. Modulation-démodulation	
Transmission d'un signal codant une information variant dans le temps.	Définir un signal modulé en amplitude, en fréquence, en phase. Citer les ordres de grandeur des fréquences utilisées pour les signaux radio AM, FM, la téléphonie mobile.
Modulation d'amplitude.	Interpréter le signal modulé comme le produit d'une porteuse par une modulante. Décrire le spectre d'un signal modulé.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Démodulation d'amplitude.	À partir de l'analyse fréquentielle, justifier la nécessité d'utiliser une opération non linéaire. Expliquer le principe de la démodulation synchrone. **Réaliser une modulation d'amplitude et une démodulation synchrone avec un multiplieur analogique.**

2. Phénomènes de transport

Cette partie présente le formalisme nécessaire à l'étude générale des phénomènes de transport abordés au programme de la classe de PSI (conduction électrique, conduction thermique, diffusion de particules, fluides en écoulement). Ce formalisme, commun à différents domaines de la physique, repose essentiellement sur la notion de bilan, global ou local. Il permet d'exprimer des lois de conservation (charge, énergie, masse) et d'établir des équations d'évolution en relation avec des propriétés phénoménologiques.
Le professeur peut aborder les différentes notions dans l'ordre qu'il souhaite, en relation avec les autres parties du programme. Il est cependant essentiel de faire apparaître les analogies et les différences entre les différents domaines d'étude.

Dans la partie « **Transport de charge** », le transport de charge et les milieux conducteurs sont étudiés en présentant un modèle microscopique. Pour sensibiliser les étudiants à l'aspect complexe de la matière, le professeur est invité à conduire une critique du modèle historique de Drude en comparant le libre parcours moyen d'un électron libre avec la distance interatomique du réseau. La conductivité électrique est réutilisée lors de l'étude des ondes électromagnétiques dans les conducteurs (effet de peau et réflexion sur un métal).

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Transport de charge	
2.1.1. Conservation de la charge	
Densité volumique de charge électrique ρ, vecteur densité de courant électrique **j**.	Passer d'une description microscopique (porteurs de charges, vitesse des porteurs) aux grandeurs mésoscopiques ρ et **j**.
Intensité du courant électrique.	Écrire l'intensité comme le flux du vecteur densité de courant électrique à travers une surface orientée.
Bilan de charge. Équation locale de la conservation de la charge.	Établir, en coordonnées cartésiennes, l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique. Énoncer l'équation locale et en interpréter chacun des termes.
Régime stationnaire.	Définir une ligne de courant et un tube de courant. Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant électrique en régime stationnaire et relier cette propriété à la loi des nœuds usuelle de l'électrocinétique.
2.1.2. Conducteur ohmique	

Loi d'Ohm locale.	Relier le vecteur densité de courant au champ électrique dans un conducteur ohmique. Citer des ordres de grandeur de la conductivité.
Modèle de Drude.	Établir, en régime stationnaire, une expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique.
Résistance d'un conducteur cylindrique.	Établir l'expression de la résistance d'un câble cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe.
Puissance électrique. Effet Joule.	Établir l'expression de la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique. Interpréter l'effet Joule.

La partie « **Transfert thermique par conduction** » est consacrée à la conduction thermique en relation avec le cours de thermodynamique de première année. Après avoir écrit les premier et deuxième principes sous forme infinitésimale, on s'attache à l'étude de la diffusion thermique avec une visée applicative et résolument concrète.
L'établissement de l'équation de diffusion thermique est limité au cas des systèmes de volume constant et les mises en équation locale sont faites exclusivement en géométries unidimensionnelles. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle. Cette partie contribue aussi à asseoir la maîtrise des opérateurs d'analyse vectorielle (gradient, divergence, laplacien), sans dérive calculatoire.
L'étude de l'équation de diffusion thermique sans terme source, en régime stationnaire ou dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), est menée par analogie avec l'électrocinétique. La notion de résistance thermique, dont la connaissance des conditions d'application est aussi importante que son utilisation, doit être illustrée par des exemples pratiques.
Aucune connaissance sur les termes sources n'est exigible sauf pour l'effet Joule. On néglige le rayonnement thermique. Dans le cadre de l'interface solide-fluide, la loi de Newton peut être utilisée, mais ni sa mémorisation, ni aucune connaissance sur son établissement ne peuvent être exigées.
Aucune méthode générale de résolution ne peut être demandée aux étudiants, mais les solutions de l'équation de diffusion en géométrie unidimensionnelle cartésienne, sans terme source, en régime stationnaire ou en régime d'ondes harmoniques doivent être connues.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.2. Transfert thermique par conduction	
2.2.1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique	
Premier principe. Deuxième principe : $dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec $\delta S_e = \delta Q/T_0$ pour une évolution monotherme.	Énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire. Utiliser avec rigueur les notations d et δ en leur attachant une signification.
2.2.2. Équation de la diffusion thermique	
Les différents modes de transfert thermique : diffusion, convection et rayonnement.	Décrire les trois modes de transfert thermique.
Flux thermique. Vecteur densité de courant thermique $\mathbf{j}_Q$.	Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\mathbf{j}_Q$ à travers une surface orientée.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Équilibre thermodynamique local.	Énoncer l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local. Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
Loi de Fourier.	Énoncer et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Bilan d'énergie.	Établir, pour un milieu évoluant à volume constant, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque à l'aide de l'opérateur divergence et son expression fournie.
Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de diffusion thermique avec ou sans terme source. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Conditions aux limites.	Exploiter la continuité du flux thermique. Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait. Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide.
2.2.3. Régime stationnaire, ARQS	
Résistance ou conductance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique et énoncer les conditions d'application de l'analogie. Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement. Exploiter des associations de résistances thermiques en série ou en parallèle.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

ARQS, analogie électrocinétique avec un circuit RC.	Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS. Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
2.2.4. Ondes thermiques	
Relation de dispersion.	Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
Effet de peau thermique.	Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation. Établir une distance caractéristique d'atténuation.

La partie « **Diffusion de particules** » est traitée par analogie avec les autres phénomènes de transport évoqués (transport de charge, conduction thermique). On peut également utiliser la loi de Fick pour interpréter les paliers de diffusion en électrochimie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Diffusion de particules	
Les différents modes de transfert de particules : diffusion et convection.	Citer les deux modes de transfert de particules.
Vecteur densité de courant de particules $\mathbf{j}_N$.	Exprimer le débit de particules comme le flux du vecteur $\mathbf{j}_N$ à travers une surface orientée.
Loi de Fick.	Énoncer et utiliser la loi de Fick.
Bilan de particules.	Établir l'équation locale de bilan de particules avec ou sans terme source.
Équation de diffusion.	Établir l'équation de diffusion. Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.

L'objectif de la partie « **Fluides en écoulement** » est d'introduire les grandeurs pertinentes caractérisant un écoulement, en cohérence avec les autres phénomènes de transport. L'expression de l'accélération comme la dérivée particulaire de la vitesse est abordée mais les équations d'Euler ou de Navier-Stokes ne sont pas au programme.
La notion de viscosité est introduite sur un exemple d'écoulement de cisaillement simple. Le nombre de Reynolds est présenté comme le rapport de deux temps caractéristiques construits par analyse dimensionnelle. Il est exploité afin d'évoquer les propriétés de similitude entre des systèmes réalisés à des échelles différentes et caractérisés par les mêmes nombres sans dimension.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Fluides en écoulement	
2.4.1. Débits et lois de conservation	
Particule de fluide.	Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.
Champ eulérien des vitesses.	Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique. Définir une ligne de courant, un tube de courant.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Dérivée particulaire du vecteur vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire du vecteur vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Citer et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme (**v.grad**) **v**.
Masse volumique µ.	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Débit massique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur µ**v** à travers une surface orientée.
Conservation de la masse.	Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.
Écoulement stationnaire.	Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
Débit volumique.	Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de **v** à travers une surface orientée.
Écoulement incompressible et homogène.	Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme et relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. Exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.
2.4.2. Actions de contact sur un fluide	
Pression.	Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface. Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression - **grad** P.
Éléments de statique des fluides.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
Viscosité dynamique.	Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau. Exploiter la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.
2.4.3. Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique	
Écoulements laminaire, turbulent. Vitesse débitante.	Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent). Relier le débit volumique à la vitesse débitante.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Nombre de Reynolds.	Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion. Interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
Chute de pression dans une conduite horizontale. Résistance hydraulique.	Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique. Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque. Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.
2.4.4. Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle	
Force de traînée subie par une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme. Coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds.	Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.
Notion de couche limite.	Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite.
Forces de traînée et de portance d'une aile d'avion à haut Reynolds.	Définir et orienter les forces de portance et de traînée. Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence.

3. Bilans macroscopiques

Cette partie prolonge l'étude des machines thermiques réalisée en première année. Elle a pour objectif d'effectuer des bilans de grandeurs extensives thermodynamiques et mécaniques. Ces bilans sont illustrés sur des situations d'intérêt industriel (réacteur, éolienne, turbine, machines thermiques…).
On définit également le modèle de l'écoulement parfait qui permet d'introduire la relation de Bernoulli.
Si un bilan mécanique nécessite un changement de référentiel, on peut utiliser la loi de composition des vitesses fournie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Définition d'un système fermé pour les bilans macroscopiques	
Système ouvert, système fermé.	Définir un système fermé approprié pour réaliser un bilan de grandeur extensive.
3.2. Bilans d'énergie	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Bilans thermodynamiques.	Exprimer les principes de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire sous la forme : $\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_u + q$; $\Delta s = s_e + s_c$ Étudier des propriétés des machines thermodynamiques réelles à l'aide de diagrammes (P,h).
Modèle de l'écoulement parfait : adiabatique, réversible, non visqueux.	Utiliser le modèle de l'écoulement parfait pour un écoulement à haut Reynolds en dehors de la couche limite.
Relation de Bernoulli.	Citer et appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène.
Effet Venturi.	Décrire l'effet Venturi.
Bilan macroscopique d'énergie mécanique.	Effectuer un bilan d'énergie sur une installation industrielle. Utiliser le fait admis que la puissance des actions intérieures est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.
3.3. Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique	
Loi de la quantité de mouvement pour un système fermé.	Effectuer l'inventaire des forces extérieures. Effectuer un bilan de quantité de mouvement.
Loi du moment cinétique pour un système fermé.	Effectuer un bilan de moment cinétique.

4. Électromagnétisme

En première année, les champs électrique et magnétique ont été présentés *via* les effets de la force de Lorentz et une étude du champ magnétique a été effectuée pour introduire les phénomènes d'induction. Le cours de deuxième année aborde les équations locales. Les équations de Maxwell sont présentées comme des postulats de l'électromagnétisme, le but étant de rendre les étudiants rapidement opérationnels dans leur utilisation. L'étude de la conversion de puissance et celle des ondes électromagnétiques en sont une exploitation.
Les équations de Maxwell peuvent être formulées dès le début sous leur forme la plus générale, ou bien elles peuvent être introduites de manière progressive en commençant par une forme simplifiée en régime stationnaire.

La partie « **Symétries des champs électrique et magnétique** » présente les relations de symétrie entre les champs électrique et magnétique et les sources, sans recourir à des expressions reliant les champs aux sources, mais en s'appuyant sur des exemples de cartes de champs.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.1. Symétries des champs électrique et magnétique	
Symétries pour le champ électrique, caractère polaire du champ électrique. Symétries pour le champ magnétique, caractère axial du champ magnétique.	Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges et de courants pour en déduire des propriétés des champs électrique et magnétique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

La partie « **Champ électrique en régime stationnaire** » introduit les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday, prises comme des postulats de l'électromagnétisme. Les seuls calculs de champs électriques exigibles doivent pouvoir être faits par application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2. Champ électrique en régime stationnaire	
Équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday.	Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday en régime variable et en régime stationnaire.
Potentiel scalaire électrique.	Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel du champ électrique. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrique.
Propriétés topographiques.	Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme du champ électrique en dehors des sources. Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement. Évaluer la valeur d'un champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles.
Équation de Poisson.	Établir l'équation de Poisson reliant le potentiel à la densité volumique de charge.
Théorème de Gauss.	Énoncer et appliquer le théorème de Gauss. Établir le champ électrique et le potentiel créés par une charge ponctuelle, une distribution de charge à symétrie sphérique, une distribution de charge à symétrie cylindrique. Exploiter le théorème de superposition.
Distribution surfacique de charge.	Utiliser le modèle de la distribution surfacique de charge. Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
Énergie potentielle électrique d'une charge ponctuelle dans un champ électrique extérieur.	Établir la relation entre l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle et le potentiel. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à une particule chargée dans un champ électrique.
Champ gravitationnel.	Établir les analogies entre les champs électrique et gravitationnel.

La partie « **Condensateur** » aborde le condensateur dans la géométrie plane. Cette étude permet d'introduire l'expression de l'énergie volumique du champ électrique sur ce cas particulier, la généralité de cette expression est admise. Aucune notion sur les conducteurs en équilibre électrostatique n'est exigible. La modification de la permittivité introduite par la présence d'un isolant est affirmée sans relation avec une description microscopique de la polarisation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Condensateur	
Phénomène d'influence électrostatique.	**Décrire qualitativement le phénomène d'influence électrostatique.**
Capacité d'un condensateur plan.	Déterminer l'expression du champ d'un condensateur plan en négligeant les effets de bord. Déterminer l'expression de la capacité.
Rôle des isolants.	Prendre en compte la permittivité du milieu dans l'expression de la capacité.
Densité volumique d'énergie électrique.	Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur. Citer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.

La partie « **Champ magnétique en régime stationnaire** » introduit les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson comme des postulats de l'électromagnétisme. La conservation du flux du champ magnétique, traduction intégrale de l'équation de Maxwell-Thomson, est l'occasion de revenir sur les connaissances de première année. La loi de Biot et Savart et le potentiel vecteur sont hors programme. L'expression de la densité volumique d'énergie magnétique est établie sur le cas particulier d'une bobine longue, sa généralisation est admise. L'usage des distributions surfaciques de courant sont strictement limité à l'étude de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4. Champ magnétique en régime stationnaire	
Équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson.	Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson en régime variable et en régime stationnaire
Conservation du flux magnétique.	Exploiter la conservation du flux magnétique et ses conséquences sur les lignes de champ magnétique.
Théorème d'Ampère.	Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère. Établir l'expression du champ magnétique créé par un fil épais et infini, par un solénoïde infini en admettant que le champ extérieur est nul, et par une bobine torique.
Forces de Laplace.	Exprimer les forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur filiforme et sur une distribution volumique de courant.

La partie « **Électromagnétisme dans l'ARQS** » étudie l'électromagnétisme en régime variable, principalement dans le cadre de l'ARQS magnétique, afin d'établir le lien avec le cours sur l'induction de première année. La notion de champ électromoteur est hors programme, la force électromotrice induite est calculée à l'aide de la loi de Faraday. Cette partie prépare également le cours sur la conversion de puissance en abordant les courants de Foucault et l'énergie magnétique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5. Électromagnétisme dans l'ARQS	
Courants de déplacement.	Établir la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.
ARQS magnétique.	Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.
Induction.	Relier la circulation du champ électrique à la dérivée temporelle du flux magnétique.
Courants de Foucault.	Décrire la géométrie des courants de Foucault dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre et expliquer le rôle du feuilletage.
Énergie magnétique. Densité volumique d'énergie magnétique.	Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités. Déterminer, à partir de l'expression de l'énergie magnétique, l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans le cas d'une bobine modélisée par un solénoïde long. Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique.
Couplage partiel, couplage parfait.	Établir, dans le cas de deux bobines couplées, l'inégalité $M^2 \leq L_1 L_2$.

La partie « **Milieux ferromagnétiques** » introduit les notions d'aimantation, d'excitation magnétique, et de perméabilité magnétique. Elle conduit à une réécriture de l'équation de Maxwell-Ampère, plus adaptée à l'étude des milieux magnétiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.6. Milieux ferromagnétiques	
Aimant permanent, champ magnétique créé dans son environnement.	Décrire, à partir d'une formule fournie exprimant le champ d'un dipôle magnétique, le champ créé par un aimant à grande distance et représenter qualitativement les lignes de champ magnétique.

Actions subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur.	Utiliser les expressions fournies de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment. Décrire qualitativement l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur.
Magnéton de Bohr.	Établir l'expression du magnéton de Bohr dans le cadre du modèle de Bohr.
Aimantation d'un milieu magnétique.	Définir le champ d'aimantation d'un milieu magnétique.
Courants d'aimantation.	Associer à une distribution d'aimantation une densité volumique de courants liés équivalente, l'expression étant admise.
Vecteurs champ magnétique, excitation magnétique et aimantation. Équation de Maxwell-Ampère écrite avec le vecteur excitation magnétique.	Définir le vecteur excitation magnétique. Écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique. Interpréter qualitativement que les sources de l'excitation magnétique sont les courants électriques libres, et que celles de champ magnétique sont les courants électriques libres et l'aimantation.
Milieu ferromagnétique.	Représenter l'allure des cycles d'hystérésis (excitation magnétique, aimantation) et (excitation magnétique, champ magnétique) d'un milieu ferromagnétique. Distinguer milieu dur et milieu doux ; citer des exemples de matériaux. **Tracer le cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique.**
Milieu ferromagnétique doux.	Modéliser un milieu doux par une relation constitutive linéaire. Définir la perméabilité relative et donner un ordre de grandeur.
Circuit magnétique avec ou sans entrefer.	Décrire l'allure des lignes de champ dans un circuit magnétique en admettant que les lignes de champ sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer.
Électroaimant.	Exprimer le champ magnétique produit dans l'entrefer d'un électroaimant.
Inductance propre d'une bobine à noyau de fer doux modélisé linéairement.	Établir l'expression de l'inductance propre de la bobine à noyau. Vérifier l'expression de l'énergie magnétique : $E_{mag} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau$.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Pertes d'une bobine réelle à noyau.	Exprimer le lien entre l'aire du cycle hystérésis et la puissance moyenne absorbée. Décrire les différents termes de pertes d'une bobine à noyau : pertes fer par courants de Foucault et par hystérésis, pertes cuivre.

5. Conversion de puissance

En première année, la conversion de puissance est abordée à l'occasion des études du transformateur de tension et du moteur à courant continu dans la partie « **Induction et forces de Laplace** ». Il s'agit ici d'approfondir en donnant le moyen d'aborder tous les éléments d'une chaîne énergétique faisant intervenir des éléments électriques, magnétiques et mécaniques.
Afin de pouvoir aborder des problématiques industrielles de forte puissance, le rôle essentiel du fer est considéré. Ainsi, les forces électromagnétiques ne se réduisent pas aux seules forces de Laplace s'exerçant sur les conducteurs traversés par des courants, l'aimantation du milieu participe de manière prépondérante au calcul des actions. De même, la prise en compte de la forte perméabilité du noyau d'un transformateur est indispensable afin d'établir une relation entre les intensités indépendante de la charge.
Par ailleurs, on étudie la conversion électronique de puissance permettant d'adapter les différentes sources d'énergie à leur utilisation.
Cet enseignement est une initiation dont l'objectif est d'expliquer les principes physiques mis en œuvre dans des réalisations concrètes, il ne s'agit pas de multiplier les exemples de solutions techniques. En particulier, les dispositifs en triphasé ne sont pas étudiés.

La partie « **Puissance électrique en régime sinusoïdal** » présente quelques résultats généraux relatifs à la puissance électrique en régime sinusoïdal. La représentation de Fresnel est introduite pour illustrer le facteur de puissance. La notion de puissance réactive est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Puissance électrique en régime sinusoïdal	
Puissance moyenne, facteur de puissance. Représentation de Fresnel.	Définir le facteur de puissance, faire le lien avec la représentation des tensions et des courants sur un diagramme de Fresnel. Citer et exploiter la relation $P = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$.
Puissance moyenne absorbée par une impédance.	Citer et exploiter les relations : $P = \Re_e(\underline{Z}) I_{eff}^2$ et $P = \Re_e(\underline{Y}) U_{eff}^2$. Justifier qu'un dipôle purement réactif n'absorbe aucune puissance en moyenne.

La partie « **Transformateur** » complète le modèle du transformateur de tension vu en première année. On ajoute ici le rôle d'un noyau de fer doux de forte perméabilité permettant d'obtenir un transformateur de courant. Les pertes et les défauts sont évoqués mais ne sont pas modélisés. En particulier, l'inductance magnétisante est hors programme. On explique l'intérêt du transformateur pour l'isolement et le transport de l'énergie électrique sur de longues distances.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.2. Transformateur	

Modèle du transformateur idéal.	Citer les hypothèses du transformateur idéal. Établir les lois de transformation des tensions et des courants du transformateur idéal, en respectant l'algébrisation associée aux bornes homologues. Relier le transfert instantané et parfait de puissance à une absence de pertes et de stockage de l'énergie électromagnétique.
Pertes.	Citer les pertes cuivre, les pertes fer par courant de Foucault et par hystérésis. Décrire des solutions permettant de réduire ces pertes.
Applications du transformateur.	Expliquer le rôle du transformateur pour l'isolement. Établir le transfert d'impédance entre le primaire et le secondaire. Expliquer l'intérêt du transport de l'énergie électrique à haute tension afin de réduire les pertes en ligne. Expliquer l'avantage d'un facteur de puissance élevé. **Mettre en œuvre un transformateur et étudier son rendement sur charge résistive.**

Dans la partie « **Conversion électro-magnéto-mécanique** », on privilégie un calcul des actions électromagnétiques en dérivant l'énergie magnétique stockée dans le système par rapport à un paramètre de position notamment afin de prendre en compte le rôle du fer. Les milieux magnétiques sont modélisés par des milieux linéaires. La notion de coénergie est hors programme.

Dans une première partie, la méthode de calcul de la force s'exerçant sur une partie mobile de fer est illustrée sur un contacteur en translation faisant partie d'un circuit magnétique dont l'entrefer est variable. À l'aide d'un bilan énergétique, le professeur pourra justifier la relation $F = (\partial E / \partial x)_i$ mais cette démonstration ne doit pas être considérée comme une capacité exigible.
On aborde ensuite le moteur synchrone en dérivant l'énergie magnétique localisée dans l'entrefer afin de déterminer le moment du couple électromagnétique. Les champs glissants statorique et rotorique sont radiaux dans l'entrefer et présentent des formes d'onde sinusoïdales. On montre que le moment moyen est non nul si les champs glissants sont synchrones. Le modèle électrique des phases de l'induit est abordé afin de décrire la conversion électromécanique de puissance, mais on n'étudiera pas l'utilisation d'une machine à vide comme compensateur synchrone.
Dans un troisième temps, le fonctionnement du moteur à courant continu est traité par analogie avec le moteur synchrone, en montrant que le collecteur réalise le synchronisme entre un champ statorique stationnaire et un champ rotorique qui lui est orthogonal quelle que soit la position angulaire du rotor, produisant ainsi un moment maximal.
On évoque enfin la réversibilité énergétique des machines électriques, en distinguant avec rigueur force électromotrice (fem) et force contre-électromotrice (fcem). La puissance mécanique des machines est reliée à la puissance électrique des forces électromotrices induites à l'aide de bilans énergétiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.3. Conversion électro-magnéto-mécanique	
5.3.1. Contacteur électromagnétique en translation	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Énergie et force électromagnétique.	Exprimer l'énergie magnétique d'un enroulement enlaçant un circuit magnétique présentant un entrefer variable. Calculer la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile en translation en appliquant l'expression fournie $F = (\partial E / \partial x)_i$.
Contacteur électromagnétique.	Sur l'exemple du relais, expliquer le fonctionnement d'un contacteur électromagnétique.
5.3.2. Machine synchrone	
Structure d'un moteur synchrone à pôles lisses et à excitation séparée.	Décrire la structure d'un moteur synchrone diphasé et bipolaire : rotor, stator, induit, inducteur.
Champ magnétique dans l'entrefer.	Exprimer, pour une machine de perméabilité infinie à entrefer constant, le champ magnétique dans l'entrefer généré par une spire passant dans deux encoches opposées. Expliquer qualitativement comment obtenir un champ dont la dépendance angulaire est sinusoïdale dans l'entrefer en associant plusieurs spires décalées.
Champ glissant statorique.	Justifier l'existence d'un champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature.
Champ glissant rotorique.	Justifier l'existence d'un champ glissant rotorique associé à la rotation de l'inducteur.
Énergie et couple.	Exprimer l'énergie magnétique totale stockée dans l'entrefer en fonction de la position angulaire du rotor. Calculer le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor en exploitant l'expression fournie $\Gamma = \partial E / \partial \theta$.
Condition de synchronisme.	Justifier la condition de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique afin d'obtenir un moment moyen non nul. Discuter qualitativement la stabilité du système en fonction du déphasage entre les deux champs glissants. Expliquer la difficulté du démarrage et du contrôle de la vitesse d'un moteur synchrone.
Modèle électrique de l'induit.	Établir les équations électriques vérifiées par les phases de l'induit en admettant les expressions des coefficients d'inductance ; donner les représentations de Fresnel associées. Justifier, à l'aide d'un bilan énergétique où seules les pertes cuivre sont envisagées, l'égalité entre la puissance électrique absorbée par les fcem et la puissance mécanique fournie.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Fonctionnement réversible.	Décrire les conditions d'utilisation de la machine synchrone en alternateur.
Machine synchrone.	Citer des exemples d'application de la machine synchrone.
5.3.3. Machine à courant continu	
Structure d'un moteur à courant continu à pôles lisses.	Décrire la structure d'un moteur à courant continu bipolaire à excitation séparée : rotor, stator, induit, inducteur.
Collecteur.	Expliquer, par analogie avec le moteur synchrone, que le collecteur établit le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor.
Couple et fcem.	Citer l'expression du moment du couple $\Gamma = \Phi i$ et établir l'expression de la fcem induite $e = \Phi\Omega$ par un argument de conservation énergétique. Décrire qualitativement les pertes existant dans une machine réelle : pertes cuivre, pertes fer, pertes mécaniques. Établir les équations électrique et mécanique. Tracer la caractéristique (Ω, Γ) à tension d'induit constante. Analyser le démarrage d'un moteur entraînant une charge mécanique exerçant un moment $-f\cdot\Omega$. **Mettre en œuvre un moteur à courant continu.**
Fonctionnement réversible.	Décrire les conditions d'utilisation de la machine à courant continu en génératrice. Choisir des conventions d'orientation adaptées.
Machine à courant continu.	Citer des exemples d'application de la machine à courant continu.

La partie « **Conversion électronique statique** » aborde la conversion électronique statique de puissance principalement sur l'exemple du hacheur série. Il ne s'agit pas de traiter un cours exhaustif sur les convertisseurs en multipliant les exemples de circuits, l'état d'esprit de cet enseignement doit permettre de réinvestir les capacités pour étudier modestement d'autres montages (redresseur, onduleur). On ne décrit pas le circuit de commande d'un transistor.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.4. Conversion électronique statique	
Formes continue et alternative de la puissance électrique.	Citer des exemples illustrant la nécessité d'une conversion de puissance électrique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Structure d'un convertisseur.	Décrire l'architecture générale d'un convertisseur électronique de puissance : générateur, récepteur, processeur de puissance utilisant des interrupteurs électroniques, commande des fonctions de commutation.
Fonction de commutation spontanée.	Décrire la caractéristique idéale courant-tension de la diode.
Fonction de commutation commandée.	Décrire la caractéristique idéale courant-tension du transistor.
Sources.	Définir les notions de sources de courant et de tension. Expliquer le rôle des condensateurs et des bobines comme éléments de stockage d'énergie assurant le lissage de la tension ou de l'intensité à haute fréquence.
Réversibilité.	Caractériser les sources par leur réversibilité en tension, en intensité, en puissance et citer des exemples.
Interconnexion.	Citer les règles d'interconnexions entre les sources.
Cellule de commutation élémentaire.	Expliquer le fonctionnement d'une cellule élémentaire à deux interrupteurs assurant le transfert d'énergie entre une source de courant et une source de tension.
Hacheur.	Tracer des chronogrammes. Exploiter le fait que la moyenne d'une dérivée est nulle en régime périodique établi. Calculer des moyennes de fonctions affines par morceaux. Utiliser un bilan de puissance moyenne pour établir des relations entre les tensions et les intensités. Justifier le choix des fonctions de commutation pour un hacheur série assurant l'alimentation d'un moteur à courant continu à partir d'un générateur idéal de tension continue. Exprimer les valeurs moyennes des signaux. Calculer l'ondulation en intensité dans l'approximation d'un hachage haute fréquence réalisant une intensité affine par morceaux.
Onduleur.	Décrire la structure en pont à quatre interrupteurs et les séquences de commutation permises. Étudier, pour un générateur de tension continue et une charge (R,L), la réalisation d'une intensité quasi-sinusoïdale par modulation de largeur d'impulsion.
Convertisseur statique.	**Mettre en œuvre un convertisseur statique.**

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

6. Physique des ondes

Le programme de physique des ondes s'inscrit dans le prolongement de la partie « **Propagation d'un signal** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PCSI, où des propriétés unificatrices (interférences, battements, ondes stationnaires…) ont été abordées en s'appuyant sur une approche expérimentale et sans référence à une équation d'onde. Il s'agit désormais de mettre en place l'équation d'onde de d'Alembert, à une ou trois dimensions, sur des systèmes mécaniques ou électromagnétiques. On aborde ensuite l'étude de la dispersion et de l'absorption associées à des phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Enfin, la propagation d'ondes dans des milieux différents conduit naturellement à étudier la réflexion et la transmission d'ondes à une interface.

La partie « **Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert** » est consacrée à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs. L'équation de d'Alembert unidimensionnelle est d'abord établie en étudiant une partie infinitésimale de corde ou de câble coaxial. On se contente de vérifier que les superpositions de fonctions du type $f(x - ct)$ et $g(x + ct)$ sont solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension.
Dans un deuxième temps, on étudie les ondes sonores puis les ondes électromagnétiques qui se propagent dans l'espace physique de dimension trois.
L'équation de propagation des ondes sonores est établie dans le cadre de l'approximation acoustique avec une approche locale.
Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution de l'équation de d'Alembert, pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert	
6.1.1. Propagation unidimensionnelle	
Ondes transversales sur une corde vibrante.	Établir l'équation d'onde dans le cas d'une corde infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.
Équation de d'Alembert. Onde progressive. Onde stationnaire.	Identifier une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité en fonction des paramètres du milieu. Citer des exemples de solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.
Ondes progressives harmoniques.	Établir la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert. Utiliser la notation complexe. Définir le vecteur d'onde, la vitesse de phase.
Ondes stationnaires harmoniques.	Décomposer une onde stationnaire en ondes progressives, une onde progressive en ondes stationnaires.
Conditions aux limites.	Justifier et exploiter des conditions aux limites.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Régime libre : modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités.	Définir et décrire les modes propres. Construire une solution quelconque par superposition de modes propres.
Régime forcé : corde de Melde.	Associer mode propre et résonance en régime forcé.
Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial.	Décrire un câble coaxial par un modèle à constantes réparties sans perte. Établir les équations de propagation dans un câble coaxial sans pertes modélisé comme un milieu continu caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique.
Impédance caractéristique.	Établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un câble coaxial.
Réflexion en amplitude sur une impédance terminale.	**Étudier la réflexion en amplitude de tension pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive.**
6.1.2. Ondes sonores dans les fluides	
Approximation acoustique.	Classer les ondes sonores par domaines fréquentiels. Justifier les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur. Écrire les équations locales linéarisées : conservation de la masse, équation thermodynamique, équation de la dynamique.
Équation de d'Alembert pour la surpression.	Établir l'équation de propagation de la surpression formulée avec l'opérateur laplacien.
Célérité.	Exprimer la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait. Citer les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau.
Densité volumique d'énergie sonore, vecteur densité de courant énergétique.	Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde.
Intensité sonore, niveau d'intensité sonore.	Définir l'intensité sonore et le niveau d'intensité sonore. Citer quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore.
Ondes planes progressives harmoniques. Onde longitudinale.	Décrire le caractère longitudinal de l'onde sonore. Discuter de la validité du modèle de l'onde plane en relation avec le phénomène de diffraction. Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Impédance acoustique.	Établir et utiliser l'impédance acoustique définie comme le rapport de la surpression sur le débit volumique ou comme le rapport de la surpression sur la vitesse.
Onde sonore sphérique harmonique divergente.	Commenter l'expression fournie de la surpression générée par une sphère pulsante : atténuation géométrique, structure locale.
Effet Doppler.	**Mettre en œuvre une détection synchrone pour mesurer une vitesse par décalage Doppler.**
6.1.3. Bilan de Poynting de l'énergie électromagnétique dans un milieu quelconque	
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting. Équation locale de Poynting.	Identifier les différents termes de l'équation locale de Poynting. Exprimer la puissance rayonnée à travers une surface à l'aide du vecteur de Poynting.
6.1.4. Ondes électromagnétiques dans le vide	
Propagation des vecteurs champs électrique et magnétique dans une région sans charge ni courant.	Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Établir les équations de propagation.
Structure d'une onde plane progressive harmonique.	Utiliser la notation complexe. Établir la relation entre le vecteur champ électrique, le vecteur champ magnétique et le vecteur d'onde. Associer la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde. Associer le flux du vecteur de Poynting à un flux de photons en utilisant la relation d'Einstein-Planck. Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire). Utiliser le principe de superposition d'ondes planes progressives harmoniques.
Polarisation rectiligne.	Identifier l'expression d'une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement. **Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.**

La partie « **Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion** » est consacrée aux phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. L'étude est menée sur des ondes harmoniques unidimensionnelles lorsque l'équation de propagation est linéaire mais n'est pas une équation de d'Alembert. On évoque ensuite la théorie de Fourier pour justifier qu'une onde quelconque limitée dans le temps est la superposition d'ondes harmoniques : on définit ainsi la notion de paquet d'onde. Pour finir, on applique les notions nouvellement introduites sur la dispersion à la propagation des ondes dans les milieux conducteurs et les plasmas. L'étude de la propagation des ondes dans un plasma dilué est exclusivement limitée aux ondes transverses électriques ; le professeur est invité à signaler, sans soucis d'exhaustivité, quelques limites du modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.2. Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion	
6.2.1. Relation de dispersion	
Propagation unidimensionnelle d'une onde harmonique dans un milieu linéaire.	Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles. Établir la relation de dispersion. Relier, pour un signal proportionnel à exp(j(ωt-$\underline{k}$x)), la partie réelle de $\underline{k}$ à la vitesse de phase et la partie imaginaire de $\underline{k}$ à une dépendance spatiale de l'amplitude.
6.2.2. Paquet d'ondes	
Superposition de deux ondes de fréquences proches dans un milieu non absorbant et dispersif.	Déterminer la vitesse de groupe. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.
Domaine spectral d'un paquet d'onde de durée finie.	Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.
6.2.3. Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs	
Conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau.	Identifier une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Établir l'expression de l'épaisseur de peau. Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz. Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie.
Modèle du conducteur parfait en présence d'un champ électromagnétique variable.	Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans le conducteur.
Onde plane transverse électrique harmonique dans un plasma dilué. Conductivité complexe du milieu. Fréquence de coupure. Vitesse de phase, vitesse de groupe. Ondes évanescentes.	Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion. Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère. Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance moyenne échangée entre le champ et les porteurs. Distinguer qualitativement les ondes évanescentes et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.

La partie « **Interfaces entre deux milieux »** est consacrée à la réflexion et à la transmission d'ondes à une interface plane sous incidence normale en acoustique et en électromagnétisme. Les relations de passage pour le champ électromagnétique sont affirmées, leurs démonstrations ne relèvent pas du programme. La détermination de l'intensité d'un courant à partir du vecteur densité de courant surfacique n'est pas un objectif de formation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.3. Interfaces entre deux milieux	
6.3.1. Cas des ondes sonores	
Réflexion, transmission d'une onde sonore sur une interface plane entre deux fluides : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses, des surpressions et des puissances sonores.	Expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude de surpression, en amplitude de vitesse ou en puissance dans le cas d'une onde plane progressive sous incidence normale. Relier l'adaptation des impédances au transfert maximal de puissance.
6.3.2. Cas des ondes électromagnétiques	
Relations de passage du champ électromagnétique en présence d'une distribution surfacique de charge ou de courant.	Interpréter le vecteur densité de courant surfacique comme un modèle pour décrire un déplacement de charges à travers un domaine d'épaisseur faible devant l'échelle de description. Utiliser les relations de passage fournies.
Réflexion d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement sur un conducteur parfait, en incidence normale. Pression de radiation.	Exploiter la continuité de la composante tangentielle du champ électrique pour justifier l'existence d'une onde réfléchie et calculer celle-ci. Établir l'expression du champ électromagnétique de l'onde réfléchie et du vecteur densité de courant surfacique. Calculer le coefficient de réflexion en puissance. Déterminer la pression de radiation à l'aide de l'expression fournie de la force de Laplace.

7. Transformations de la matière : aspects thermodynamiques et cinétiques

Les transformations de la matière ont été abordées au premier semestre de la classe de PCSI ; le critère d'évolution spontanée d'un système chimique en transformation y a été présenté et utilisé sans être démontré. Ce critère a été remobilisé au second semestre lors de l'étude des transformations chimiques en solution aqueuse.
Le but de cette partie est double : aborder les transferts thermiques et établir, puis exploiter le critère d'évolution spontanée d'un système engagé dans une transformation physico-chimique
, ce qui nécessite l'introduction de la fonction enthalpie libre et du potentiel chimique.

Dans la partie « **Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », l'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif aux transformations physiques du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, pouvoirs calorifiques des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel. Un prolongement est proposé dans le cadre de l'étude thermique au sein des réacteurs continus dans la partie portant sur les procédés industriels continus.

Notions et contenus	Capacités exigibles
7.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
État standard. Enthalpie standard de réaction. Loi de Hess. Enthalpie standard de formation, état standard de référence d'un élément.	Déterminer l'enthalpie standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques. Associer le signe de l'enthalpie standard de réaction au caractère endothermique ou exothermique de la réaction.
Effets thermiques en réacteur monobare : - transfert thermique associé à la transformation chimique en réacteur monobare, isotherme ; - variation de température en réacteur monobare, adiabatique.	Prévoir, à partir de données thermodynamiques, le sens et estimer la valeur du transfert thermique entre un système, siège d'une transformation physico-chimique et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation chimique supposée monobare et réalisée dans un réacteur adiabatique. **Mettre en œuvre une transformation physico-chimique en réacteur adiabatique monobare pour déterminer une enthalpie standard de réaction.**

Dans la partie « **Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », on adopte pour les potentiels chimiques une expression générale : $\mu_i = \mu_{iréf} + RT\ln(a_i)$ qui fait référence aux activités a_i introduites en première année. L'établissement de cette expression est hors programme. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'un constituant en phase condensée pure n'est pas abordée. On se limite aux cas d'une espèce chimique pure, d'une espèce en solution aqueuse très diluée et d'une espèce en mélange de gaz parfaits avec référence à l'état standard.
Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température. Les grandeurs standard de réaction permettent la détermination de la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre K° d'une réaction, valeur qui était simplement donnée en première année. C'est ainsi l'occasion de revenir sur la détermination de la composition du système physico-chimique en fin d'évolution.

La notion d'affinité chimique n'est pas utilisée, le sens d'évolution spontanée d'un système hors d'équilibre, à température et pression fixées, est déterminé par le signe de l'enthalpie libre de réaction $\Delta_r G$.
Enfin, l'étude de l'influence de la modification d'un paramètre (pression, température ou composition) sur un système chimique permet d'aborder la problématique de l'optimisation des conditions opératoires d'un procédé chimique.
Les illustrations et applications sont choisies dans le domaine industriel, dans la vie courante et au niveau du laboratoire.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
7.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
Enthalpie libre.	Justifier que l'enthalpie libre est le potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées. Exprimer l'entropie créée en fonction de la variation d'enthalpie libre.
Identités thermodynamiques. Potentiel chimique.	Citer les expressions des différentielles de U, H, G. Distinguer les caractères intensif ou extensif des variables utilisées.
Potentiel chimique du corps pur.	Identifier le potentiel chimique d'un corps pur à son enthalpie libre molaire.
Conditions d'équilibre d'un corps pur sous plusieurs phases.	Établir l'égalité des potentiels chimiques pour un corps pur en équilibre sous plusieurs phases. En déduire l'existence d'une courbe d'équilibre sur un diagramme (P,T).
Paramètres intensifs.	Identifier un jeu de paramètres intensifs indépendants permettant la description d'un système physico-chimique en équilibre.
Évolution d'un système sous plusieurs phases.	Utiliser le potentiel chimique pour prévoir l'évolution d'un système contenant une espèce chimique dans plusieurs phases.
Potentiel chimique d'une espèce chimique dans un mélange ; enthalpie libre d'un système chimique. Activité.	Donner l'expression (admise) du potentiel chimique d'un constituant en fonction de son activité. Exprimer l'enthalpie libre d'un système chimique en fonction des potentiels chimiques.
Enthalpie de réaction, entropie de réaction, enthalpie libre de réaction et grandeurs standard associées. Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction ; équilibre physico-chimique ; évolution d'un système chimique.	Justifier qualitativement ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction. Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à pression et température fixées. Prévoir le sens d'évolution à pression et température fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Déterminer les grandeurs standard de réaction à partir des tables de données thermodynamiques et de la loi de Hess.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Constante thermodynamique d'équilibre ; relation de Van 't Hoff.	Citer et exploiter la relation de Van 't Hoff. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre à une température quelconque. **Déterminer l'évolution de la valeur d'une constante thermodynamique d'équilibre en fonction de la température.**
État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale.	Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique.
Optimisation thermodynamique d'un procédé chimique : - par modification de la valeur de K° ; - par modification de la valeur du quotient réactionnel.	Identifier les paramètres d'influence et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.

Les transformations chimiques de la matière réalisées au laboratoire mettent en jeu de faibles quantités de matière et sont conduites en réacteur fermé. À l'échelle industrielle, les transformations mettent en jeu des quantités de matière beaucoup plus élevées et sont souvent conduites en réacteur ouvert pour assurer un fonctionnement continu. L'objectif de cette partie « **Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques** » est une initiation aux bilans de matière et d'énergie effectués sur des réacteurs ouverts continus.
L'étude des opérations unitaires s'inscrit dans le prolongement des connaissances acquises en physique, notamment en mécanique des fluides, et en chimie, en particulier en cinétique en réacteur fermé et en thermodynamique, domaines qui sont à la base du génie des procédés et de la technologie chimique.
Sensibiliser les étudiants aux enjeux spécifiques du secteur industriel est un élément constitutif de leur formation. Des procédés chimiques innovants s'imposent pour développer des techniques et des appareils adaptés permettant d'obtenir des rendements supérieurs à ceux des procédés conventionnels, tout en limitant leurs impacts environnementaux, en mettant au point des procédés plus sûrs, moins consommateurs d'énergie, de matières premières et de solvants et également moins polluants.

Notions et contenus	Capacités exigibles
7.3. Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques	
D'un protocole de laboratoire à un procédé industriel. Opérations unitaires d'un procédé.	 Exploiter un schéma de procédé légendé pour identifier les différentes opérations unitaires.
Procédés discontinus ou continus.	Identifier un procédé discontinu ou continu.
Procédés continus en régime stationnaire : débit de matière en masse et en quantité de matière, bilan de matière.	Effectuer un bilan de matière sur une espère chimique à partir de données sur les compositions et les débits entrants et sortants.

Cinétique de transformations en réacteur ouvert. Modèle du réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas d'un écoulement de débits volumiques égaux à l'entrée et à la sortie.	 Effectuer un bilan de quantité de matière sur une espèce chimique.
Taux de conversion d'un réactif. Temps de passage.	Relier le taux de conversion du réactif au temps de passage pour une transformation de loi de vitesse de réaction donnée.
Modèle du réacteur chimique en écoulement piston isotherme en régime stationnaire dans le cas de débits volumiques égaux à l'entrée et à la sortie du réacteur ; dimensionnement d'un réacteur en écoulement piston.	Établir un bilan de quantité de matière sur une espèce chimique. Relier le taux de conversion en sortie d'un réacteur en écoulement piston et le temps de passage pour une transformation modélisée par une loi de vitesse donnée.
Étude thermique d'un réacteur ouvert. Bilan énergétique sur un réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas de débits volumiques égaux à l'entrée et à la sortie.	 Effectuer un bilan énergétique sur un réacteur ouvert afin d'établir une relation entre les températures d'entrée et de sortie, le taux de conversion et le flux thermique éventuellement échangé. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, déterminer le(s) point(s) de fonctionnement (température et taux de conversion) d'un réacteur ouvert siège d'une transformation modélisée par une réaction isotherme unique et en discuter la stabilité.

8. Aspects thermodynamiques et cinétiques de l'électrochimie

Les aspects thermodynamiques et cinétiques des réactions d'oxydo-réduction sont appliqués notamment à la corrosion d'une part et aux dispositifs électrochimiques que sont les piles et les accumulateurs d'autre part. L'illustration des notions gagne à s'appuyer sur des applications concrètes comme par exemple la mise en œuvre de capteurs électrochimiques dans l'analyse de l'eau, de l'air ou d'effluents. L'approche de l'électrochimie proposée ici privilégie les raisonnements qualitatifs et les aspects expérimentaux, plutôt que les développements théoriques et formels.

La partie « **Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction** » se fonde sur les acquis de première année relatifs à l'étude des réactions d'oxydo-réduction et des piles, ainsi que sur la partie de thermodynamique chimique de seconde année pour relier les grandeurs thermodynamiques aux potentiels.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
8.1. Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction	
Relation entre enthalpie libre de réaction et potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.	Citer et exploiter la relation entre l'enthalpie libre de réaction et les potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.
Relation entre enthalpie libre standard de réaction et potentiels standard des couples impliqués.	Déterminer l'enthalpie libre standard d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. Déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple d'oxydo-réduction à partir de données thermodynamiques.

La partie « **Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel** » se fonde sur les acquis de cinétique chimique de première année et les prolongent par le tracé et l'exploitation de courbes courant-potentiel.
Les courbes courant-potentiel, dont le tracé est proposé en capacité expérimentale, sont un outil essentiel dans la compréhension et la modélisation des systèmes électrochimiques.
L'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre est appelé surpotentiel plutôt que surtension pour des raisons pédagogiques, en cohérence avec le vocabulaire anglo-saxon correspondant.

Notions et contenus	Capacités exigibles
8.2. Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel	
Courbes courant-potentiel sur une électrode en régime stationnaire : - surpotentiel ; - systèmes rapides et systèmes lents ; - nature de l'électrode ; - courant de diffusion limite ; - vagues successives ; - domaine d'inertie électrochimique du solvant.	Décrire le montage à trois électrodes permettant de tracer des courbes courant-potentiel. Relier vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Identifier le caractère lent ou rapide d'un système à partir des courbes courant-potentiel. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. Identifier des paliers de diffusion limite sur des relevés expérimentaux. Relier, à l'aide de la loi de Fick, l'intensité du courant de diffusion limite à la concentration du réactif et à la surface immergée de l'électrode. Tracer l'allure de courbes courant-potentiel de branches d'oxydation ou de réduction à partir de données fournies, de potentiels standard, concentrations et surpotentiels. **Tracer et exploiter des courbes courant-potentiel.**

La partie « **Stockage et conversion d'énergie dans des dispositifs électrochimiques** » s'appuie sur les courbes courant-potentiel pour étudier le fonctionnement des piles et leur recharge, ainsi que les électrolyseurs. Ces courbes permettent en effet de déterminer différentes caractéristiques : réactions aux électrodes, tension à vide, tension à imposer pour une recharge, etc.

Notions et contenus	Capacités exigibles
8.3. Stockage et conversion d'énergie dans des dispositifs électrochimiques	
Conversion d'énergie chimique en énergie électrique : fonctionnement des piles.	
Transformations spontanées et réaction modélisant le fonctionnement d'une pile électrochimique.	Établir l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique. Relier la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de la réaction modélisant son fonctionnement. Déterminer la capacité électrique d'une pile.
Courbes courant-potentiel et fonctionnement d'une pile électrochimique.	Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'une pile électrochimique et tracer sa caractéristique. Citer les paramètres influençant la résistance interne d'une pile électrochimique.
Conversion d'énergie électrique en énergie chimique.	
Transformations forcées lors d'une électrolyse et de la recharge d'un accumulateur.	Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'un électrolyseur et prévoir la valeur de la tension minimale à imposer. Exploiter les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes (purification de la solution électrolytique, choix des électrodes) dans la recharge d'un accumulateur. Déterminer la masse de produit formé pour une durée et des conditions données d'électrolyse. Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié.
Stockage et conversion d'énergie chimique.	**Étudier le fonctionnement d'une pile ou d'un électrolyseur pour effectuer des bilans de matière et des bilans électriques.**

La lutte contre la corrosion est un enjeu économique actuel et la compréhension des phénomènes de corrosion et des facteurs influençant cette corrosion est essentielle pour effectuer des choix de méthodes de protection. La partie « **Corrosion humide ou électrochimique** » exploite les courbes courant-potentiel pour interpréter les phénomènes de corrosion, de protection et de passivation. On se limite à la corrosion uniforme et à la corrosion galvanique de deux métaux en contact. Les tracés de diagrammes de Tafel ou d'Evans sont hors-programme.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Notions et contenus	Capacités exigibles
8.4. Corrosion humide ou électrochimique	
Corrosion uniforme en milieu acide ou en milieu neutre oxygéné : potentiel de corrosion, courant de corrosion. Corrosion d'un système de deux métaux en contact.	Positionner un potentiel de corrosion sur un tracé de courbes courant-potentiel. Interpréter le phénomène de corrosion uniforme d'un métal ou de deux métaux en contact en utilisant des courbes courant-potentiel ou d'autres données expérimentales, thermodynamiques et cinétiques. Déterminer une vitesse de corrosion. Citer des facteurs favorisant la corrosion.
Protection contre la corrosion : - revêtement ; - anode sacrificielle ; - protection électrochimique par courant imposé.	Exploiter des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement : - la qualité de la protection par un revêtement métallique ; - le fonctionnement d'une anode sacrificielle.
Passivation.	Interpréter le phénomène de passivation sur une courbe courant-potentiel. **Mettre en évidence le phénomène de corrosion et les facteurs l'influençant.**

Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique de PCSI. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une aide.

1. Domaine conversion de puissance

- Wattmètre numérique.
- Transformateur à noyau ferromagnétique.
- Machine à courant continu.
- Alimentation stabilisée.

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre.
- Microcontrôleur.
- CAN et CNA.
- ALI.
- Multiplieur analogique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

3. **Domaine ondes**
   - Câble coaxial, bouchons adaptés.
   - Émetteurs et récepteurs à ultrasons.
   - Haut-parleur, microphone.
   - Polariseurs.

4. **Domaine chimie**
   - Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
   - Spectrophotomètre UV-visible.
   - pH-mètre et électrodes de mesure.
   - Voltmètre et électrodes.
   - Conductimètre et cellule de mesure.
   - Thermomètre.
   - Balance de précision.
   - Électrodes de référence.
   - Électrolyseur.

Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de PSI sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de PCSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'étude de l'outil « gradient » abordée en PCSI en introduisant de nouveaux opérateurs : seules leurs expressions en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Toutes les autres formules utiles (expressions en coordonnées cylindriques ou sphériques, actions sur des produits, combinaisons d'opérateurs, etc.) doivent être fournies.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en PCSI en admettant la décomposition d'une fonction non périodique du temps en une somme continue de fonctions sinusoïdales ; la transformée de Fourier n'est pas au programme. On insiste sur la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse vectorielle	
Gradient.	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle : **rot**(**rotA**) = **grad**(div**A**) -Δ**A** .
Champs proportionnels à exp(iωt-i**k.r**) ou exp(i**k.r**-iωt).	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur i**k**.
2. Analyse de Fourier	
Synthèse spectrale d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.
Synthèse spectrale d'une fonction non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
4. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle. Théorème de Schwarz.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclut l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de première année de la classe de PCSI.

Outils numériques	Capacités exigibles
Transformée de Fourier discrète.	Calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal à valeurs réelles en utilisant la fonction **rfft** de la bibliothèque **numpy.fft** (sa spécification étant donnée).
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.

Enseignements secondaire et supérieur

Classes préparatoires scientifiques

Programmes de mathématiques et de physique-chimie des classes préparatoires de seconde année de mathématiques, physique et informatique (MPI) et de mathématiques, physique et informatique* (MPI*)

NOR : ESRS2111756A
arrêté du 13-7-2021 - JO du 5-8-2021
MESRI - DGESIP A1-2 - MENJS - DGESCO - MOM

Vu Code de l'éducation, notamment articles D. 612-19 à D. 612-29 ; arrêtés du 10-2-1995 modifiés ; avis du Cneser du 8-6-2021 ; avis du CSE du 17-6-2021 ; avis de la ministre des Armées en date des 1er, 2, 5 et 6-7-2021

Article 1 - Les programmes de mathématiques et de physique-chimie de seconde année des classes préparatoires mathématiques, physique et informatique (MPI) et mathématiques, physique et informatique* (MPI*) figurent respectivement aux annexes 1 et 2 du présent arrêté.

Article 2 - Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023.

Article 3 - Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis et Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 4 - Le présent arrêté sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 13 juillet 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
Édouard Geffray

Pour le ministre des Outre-mer, et par délégation,
La directrice générale des outre-mer,
Sophie Brocas

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle, et par délégation,
La cheffe du service de la stratégie des formations et de la vie étudiante, adjointe à la directrice générale,
Isabelle Prat

Annexes

Programmes de mathématiques et de physique-chimie des classes préparatoires de seconde année de mathématiques, physique et informatique (MPI) et de mathématiques, physique et informatique (MPI*)*

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques, physique, informatique (MPI)

Annexe 1
Programme de mathématiques

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Classes préparatoires MP et MPI
Programme de mathématiques

Table des matières

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la théorie des équations différentielles utilise des concepts et des résultats développés en algèbre linéaire ; le calcul différentiel et l'optimisation exploitent en outre les endomorphismes autoadjoints ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend trois sections. La première formalise les différentes structures algébriques rencontrées dans le programme, introduit l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme exemple de structure quotient et étudie l'anneau $\mathbb{K}[X]$. La deuxième prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et combine les points de vue géométrique (éléments propres), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matriciel pour aboutir à une théorie de la réduction substantielle : diagonalisation, trigonalisation, sous-espaces caractéristiques. La troisième, située dans le cadre euclidien, étudie la notion d'adjoint, les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints (théorème spectral), et introduit les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation.

La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, d'étudier la continuité des applications linéaires (normes subordonnées), d'introduire les concepts de compacité et de connexité par arcs et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, caractérisation des compacts, continuité des applications linéaires et polynomiales.
La section sur les séries complète l'étude des séries numériques abordée en première année et la prolonge par celles des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
La définition des différents modes de convergence d'une suite de fonctions bénéficie du cadre topologique introduit dans la section « Espaces vectoriels normés ». L'étude des suites et séries de fonctions conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme et aboutit à l'énoncé de deux théorèmes d'approximation.
Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires.
La section sur les fonctions vectorielles étend rapidement aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie les résultats d'analyse réelle étudiés en première année et fournit des outils pour les équations différentielles et le calcul différentiel.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable. L'intégration des relations de comparaison dans le cas des fonctions positives permet de faire le lien avec les théorèmes similaires étudiés sur les séries.
Les théorèmes sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes introduit rapidement les notions générales de la théorie des probabilités afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet d'utiliser l'exponentielle d'endomorphisme et de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.

La section sur le calcul différentiel et l'optimisation a pour objectif d'étendre l'étude menée en première année au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie et de donner une introduction à l'optimisation au premier et au second ordre. La différentielle en un point est définie de manière intrinsèque afin d'établir un lien avec l'algèbre linéaire. Les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une partie constituent une première approche de la géométrie différentielle. Enfin, l'optimisation au second ordre s'appuie sur les endomorphismes autoadjoints.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Programme

Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques offre l'occasion d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire, ou, ultérieurement, de la géométrie des espaces euclidiens.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique mettant l'accent sur la notion d'idéal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les groupes	
Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	
Ordre d'un élément d'un groupe.	L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \iff d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.
c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.
d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.
e) Anneaux $\mathbb{K}[X]$	
Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Par convention, le PGCD est unitaire.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

f) Algèbres

Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Compléments d'algèbre linéaire

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E=\bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Matrices définies par blocs. Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	Interprétation géométrique des blocs. La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible. Transvections par blocs. Invariance du déterminant.
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	

b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction matricielle.
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	Équation aux éléments propres $u(x)=\lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Le noyau et l'image de u sont stables par v.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle. Cas où χ_u est scindé à racines simples.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.	
h) Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$	
i) Polynômes annulateurs et réduction	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.	Traduction matricielle.
j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.	Dimension d'un sous-espace caractéristique.
Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	

Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est double :
- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.	
Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie en base orthonormée.	Interprétation matricielle.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.

f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathscr{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E)$, $\mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Topologie des espaces vectoriels normés

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires) ;*
- *introduire la notion de partie compacte dans un espace vectoriel normé, en soulignant le rôle qu'elle joue dans les résultats d'existence, notamment en matière d'optimisation ;*
- *introduire la notion de composante connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et intervient en calcul différentiel ;*
- *dégager l'idée fondamentale d'inégalité linéaire, qui apparaît lors de l'étude de la comparaison des normes et de la continuité des applications linéaires, et qui est quantifiée par la notion de norme d'opérateur.*

Les notions seront illustrées par des exemples variés. On pourra ainsi travailler dans les espaces $\mathbb{K}^n$, les espaces de polynômes, d'applications linéaires ou de matrices, ainsi que dans divers espaces fonctionnels.

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures. Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Normes et espaces vectoriels normés

Contenus	Capacités & commentaires
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$, $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\\| \\|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\\| \\|_1$ et $\\| \\|_2$.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

c) Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.

e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\\|x\\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Contenus	Capacités & Commentaires
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E.

f) Applications linéaires et multilinéaires continues

Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E,F)$.
Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.	Notations $\|\|\|u\|\|\|$, $\|u\|_{\mathrm{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.
Critère de continuité des applications multilinéaires.	La démonstration n'est pas exigible.

g) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Un fermé relatif d'une partie compacte est compact. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

h) Applications continues sur une partie compacte

Image continue d'une partie compacte. Théorème de Heine.	
Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.

i) Connexité par arcs

Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.	
Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}_c(E,F)$.	
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Séries numériques et vectorielles

L'objectif de cette section est double :

- *consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques, en particulier à travers l'étude de questions de calcul asymptotique ;*
- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie.*

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert.	
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Suites et séries de fonctions, séries entières

A - Suites et séries de fonctions

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *définir différents modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *introduire la thématique de l'approximation, reliée à la notion topologique de densité, à travers deux théorèmes d'approximation uniforme susceptibles de nombreuses applications.*

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie les exemples significatifs : construction de fonctions solutions de problèmes (équations fonctionnelles ou différentielles, par exemple), mise en évidence de fonctions aux propriétés remarquables...

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

B - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de fonction développable en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être utilisée directement.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Théorème d'Abel radial : si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.	La démonstration est hors programme.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
d) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R, R[$. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \lvert z\rvert < 1\}$.	Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
Développements usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Fonctions vectorielles

Cette section a deux objectifs :

- *étendre rapidement le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction en termes de coordonnées dans une base.
Dérivabilité à droite et à gauche.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire.	
Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est multilinéaire.	Cas du produit scalaire, du déterminant.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	

c) Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$. Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\left\lVert \int_a^b f \right\rVert \leqslant \int_a^b \lVert f \rVert$. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	

e) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est triple :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*
- *donner des outils efficaces de passage à la limite sous l'intégrale, en particulier le théorème de convergence dominée ;*
- *compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.*

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs : transformées intégrales (Fourier, Laplace), intégrales eulériennes...

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.	
Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$.	

b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I \lvert f\rvert < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b, en a.
Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}\mathrm{d}x$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

e) Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

f) Convergence dominée

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	

g) Intégration terme à terme

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0,+\infty]$, $$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \lvert f_n(t)\rvert \,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

h) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & Commentaires
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue ; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux ; – il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Variables aléatoires discrètes

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.	Notations $P_B(A)$, $P(A\|B)$.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A \| B) = P(A)$.
Famille d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Espaces probabilisés discrets	
Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.
e) Variables aléatoires discrètes	
Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.	Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle. Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X.
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.
Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.	
La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.	
Notation $X \sim Y$.	La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.
Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.	
Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$	Extension au cas de plus de deux variables.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
g) Lois usuelles	
Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p.	Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Contenus	Capacités & Commentaires

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Contenus	Capacités & Commentaires
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1.
Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$.	
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.
Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.	
Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $\mathrm{E}\big(X^2\big) < +\infty$, X est d'espérance finie.	La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\big(X^2\big)\,\mathrm{E}\big(Y^2\big)$.	Cas d'égalité.
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big(X^2\big) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.	

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
k) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k$.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Équations différentielles linéaires

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La pratique de la résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limite en conséquence la technicité des exercices sur ce point. On peut en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter les courbes intégrales.

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A'(t)X + B(t).$$
où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$, $\quad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$.	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	

Calcul différentiel et optimisation

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$;*
- *donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.*

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.

Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1. Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notation $\mathrm{d}f(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, application linéaire.	
Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

c) Opérations sur les applications différentiables

Contenus	Capacités & Commentaires
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables.	
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$

d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Contenus	Capacités & Commentaires
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0,1]$.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.
f) Optimisation : étude au premier ordre	
Point critique d'une application différentiable. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.
g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$	
Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_k} \ldots \partial_{j_1} f$, $\partial_{j_1,\ldots,j_k} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.
h) Optimisation : étude au second ordre	
Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \dfrac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\\|h\\|^2)$, $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \dfrac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\\|h\\|^2)$.	La démonstration n'est pas exigible.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n = 2$ (trace et déterminant).

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques, physique, informatique (MPI)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie MPI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de MPI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de MPII, option sciences informatiques. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes de la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de sept thèmes **:** « Mécanique », « Éléments de traitement du signal », « Optique », « Électromagnétisme », « Thermodynamique : transferts thermiques », « Physique quantique », « Transformation de la matière ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras** dans la colonne capacités exigibles, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de MPI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	    o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	    o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	    o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :

- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de MPI durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante du programme de MPII, option sciences informatiques dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de la classe de MPI.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de temps et de fréquences	
Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
2. Électricité et électronique	
Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel.
Électronique numérique.	Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.
Électronique logique.	Mettre en œuvre divers montages utilisant des portes logiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

3. Optique	
Analyse d‘une lumière.	Identifier, à l’aide d’un polariseur, une onde polarisée rectilignement et déterminer sa direction de polarisation.
Analyse d‘une figure d'interférence.	Mettre en œuvre un photodétecteur en sortie d’un interféromètre.
Cohérence temporelle d’une source.	Régler un interféromètre de Michelson compensé pour une observation en lame d’air avec une source étendue à l’aide d’un protocole fourni. Obtenir une estimation de la longueur de cohérence d’une source et de l’écart spectral d’un doublet à l’aide d’un interféromètre de Michelson réglé en lame d’air.
4. Thermodynamique	
Conduction thermique.	Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique.
5. Transformation de la matière	
Mesures de grandeurs physique en chimie : volume, masse, pH, absorbance, tension électrique et intensité du courant.	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée avec le matériel approprié. Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.
Dosage par titrage acide-base. Suivis d’un titrage par pH-métrie et par indicateurs colorés. Repérage de l’équivalence.	Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage acide-base. Choisir et utiliser un indicateur coloré de fin de titrage dans le cas d’un titrage acide-base. Exploiter la réaction support de titrage et déterminer la grandeur recherchée.
Réalisation et étude de piles.	Mettre en œuvre des piles et déterminer leurs caractéristiques à vide ou en fonctionnement.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L’apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l’impact de leur activité sur l’environnement

© Ministère de l’enseignement supérieur, de la recherche et de l’innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- Risque chimique Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
- Risque électrique	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- Risque optique	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- Risques liés à la pression et à la température	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
2. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de sept thèmes.

1. Mécanique

1.1. Référentiels non galiléens
1.2. Lois du frottement solide

2. Éléments de traitement du signal

2.1. Signaux périodiques
2.2. Électronique numérique
2.3. Portes logiques
2.4. Logique séquentielle et stabilité

3. Optique
- 3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses
- 3.2. Superposition d'ondes lumineuses
- 3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young
- 3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue

4. Électromagnétisme
- 4.1. Électrostatique
- 4.2. Magnétostatique
- 4.3. Équations de Maxwell
- 4.4. Énergie du champ électromagnétique
- 4.5. Propagation et rayonnement

5. Thermodynamique : transferts thermiques

6. Physique quantique
- 6.1. Fonction d'onde et équation de Schrödinger
- 6.2. Particule libre
- 6.3. États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux
- 6.4. États non stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini

7. Transformation de la matière
- 7.1 Transformations chimiques d'un système
- 7.2 Acides et bases, réactions acide-base
- 7.3 Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction

1. Mécanique

Le programme de mécanique de MPI vise à compléter les acquis de mécanique de la classe de MPII, option sciences informatiques. Il est structuré en deux sous-parties : la première est consacrée aux changements de référentiels, la seconde aux conséquences mécaniques des actions de frottements entre solides.

La partie « **Référentiels non galiléens** » est organisée autour de deux situations : la translation et la rotation uniforme autour d'un axe fixe. L'accent est mis sur la compréhension qualitative des effets observés, l'évaluation des ordres de grandeurs et les conséquences expérimentales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Référentiels non galiléens	
Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre dans les cas du mouvement de translation et du mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.	Identifier et caractériser un mouvement de translation et un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel par rapport à un autre.
Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.	Exprimer le vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.

Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation, et dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : vitesse d'entraînement, accélérations d'entraînement et de Coriolis.	Relier les dérivées d'un vecteur dans des référentiels différents par la relation de la dérivation composée. Citer et utiliser les expressions de la vitesse d'entraînement et des accélérations d'entraînement et de Coriolis.
Dynamique du point en référentiel non galiléen dans le cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Forces d'inertie.	Exprimer les forces d'inerties, dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Décrire et interpréter les effets des forces d'inertie dans des cas concrets : sens de la force d'inertie d'entraînement dans un mouvement de translation ; caractère centrifuge de la force d'inertie d'entraînement dans le cas où le référentiel est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Utiliser les lois de la dynamique en référentiel non galiléen dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.
Caractère galiléen approché d'un référentiel. Exemple du référentiel de Copernic, du référentiel géocentrique et du référentiel terrestre.	Citer quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre. Estimer, en ordre de grandeur, la contribution de la force d'inertie de Coriolis dans un problème de dynamique terrestre.

La partie « **Lois du frottement solide** », est limitée au seul cas de la translation ; elle permet de mettre en œuvre un mode de raisonnement spécifique et particulièrement formateur, sans pour autant omettre les conséquences expérimentales

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Lois du frottement solide	
Contact entre deux solides. Aspects microscopiques. Lois de Coulomb du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation. Aspect énergétique.	Utiliser les lois de Coulomb dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider. Effectuer un bilan énergétique. **Effectuer une mesure d'un coefficient de frottement.** <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler une situation mécanique dans laquelle intervient au moins un changement de mode de glissement.

2. Éléments de traitement du signal

Ce thème du programme, décomposé en quatre parties, complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « **Ondes et signaux** » du programme de MPII, option sciences informatiques. Les capacités exigibles ont vocation à être principalement développées au cours de séances de travaux pratiques.

Dans la première partie intitulée « **Signaux périodiques** », l'accent est mis sur l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique, l'objectif étant de comprendre le rôle central de la linéarité des systèmes pour interpréter la forme du signal de sortie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Signaux périodiques	
Signaux périodiques.	Commenter le spectre d'un signal périodique : selon leur rang, attribuer aux différents harmoniques le rôle qu'elles jouent dans la forme du signal analysé.
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique**.

La partie « **Électronique numérique** » est à vocation uniquement expérimentale ; elle constitue une initiation au traitement numérique des signaux à travers les points suivants : l'échantillonnage et le repliement de spectre, la conversion analogique/numérique et le filtrage numérique. Le phénomène de repliement de spectre est présenté qualitativement au moyen d'illustrations démonstratives, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon afin de réaliser convenablement une acquisition numérique. Un filtrage numérique, du type passe-bas, est réalisé à l'aide d'un convertisseur analogique/numérique et d'un traitement numérique, un convertisseur numérique/analogique restitue ensuite un signal de sortie analogique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Électronique numérique	
Échantillonnage : fréquence d'échantillonnage. Conséquences expérimentales du théorème de Nyquist-Shannon.	**Réaliser l'échantillonnage d'un signal. Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon. Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage. Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.** <u>Capacité numérique</u> : calculer, à l'aide d'un langage de programmation, la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique.

Filtrage numérique.	**Mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.** Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler un filtrage numérique et visualiser son action sur un signal périodique.

Les deux dernières parties intitulées « **Portes logiques** » et « **Logique séquentielle et stabilité** » visent à étudier les composants fondamentaux des circuits logiques ainsi que quelques propriétés de tels circuits permettant la réalisation de dispositifs fréquemment mis en œuvre dans les matériels informatiques.
On se limite à des systèmes comportant un nombre raisonnable de composants. La connaissance des circuits électroniques constituant les portes et bascules est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3 Portes logiques	
Interrupteurs commandés par une tension. Porte logique NOT. Portes logiques AND, OR, NAND, NOR à deux ou plusieurs entrées. Porte logique XOR.	Déterminer la table de vérité d'une association d'interrupteurs commandés par une tension. Identifier par sa table de vérité la porte logique réalisée par une association d'interrupteurs commandés par une tension.

2.4 Logique séquentielle et stabilité	
États stables. Circuits astable, monostable, bistable.	Déterminer les états stables d'un circuit contenant des portes logiques, avec rétroaction. **Réaliser un oscillateur à l'aide d'un circuit astable à portes logiques.** **Réaliser un convertisseur fréquence tension utilisant un circuit monostable à porte logique.**
Bascule RS à portes NAND ou NOR.	Décrire le fonctionnement d'une bascule RS dont le schéma est fourni. Expliquer comment réaliser une mémoire à l'aide d'un circuit bistable.
Chronogramme.	Déterminer le chronogramme des grandeurs électriques pertinentes d'un circuit comportant des portes logiques.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

3. Optique

Le programme d'optique de la filière MPI s'inscrit dans le prolongement du thème « **Ondes et signaux** » du programme de MPII, option sciences informatiques. Il s'agit pour les étudiants d'approfondir l'étude des phénomènes d'interférences lumineuses, dans le cadre du modèle ondulatoire de la lumière. L'approche reste centrée sur l'expérience, mais la modélisation doit permettre d'analyser de façon raisonnée les conditions optimales d'observation d'interférences lumineuses, et leur exploitation quantitative. L'enseignant ne manquera pas de rappeler que ces phénomènes, étudiés ici dans le cadre de l'optique, sont généralisables à tout comportement ondulatoire.

La partie « **Modèle scalaire des ondes lumineuses** » introduit les outils nécessaires pour décrire les phénomènes d'interférences. Le programme utilise le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut utiliser indifféremment les mots « intensité » ou « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau. L'intensité lumineuse est introduite comme une puissance par unité de surface. Le théorème de Malus (orthogonalité des rayons de lumière et des surfaces d'ondes) est admis.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses	
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique.	Utiliser une grandeur scalaire pour décrire un signal lumineux.
Chemin optique. Déphasage dû à la propagation. Surfaces d'ondes. Théorème de Malus (admis). Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Exprimer le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique. Associer une description de la formation des images en termes de rayon lumineux et en termes de surfaces d'onde. Utiliser la propriété énonçant que le chemin optique séparant deux points conjugués est indépendant du rayon lumineux choisi.
Modèle d'émission. Relation (admise) entre le temps de cohérence et la largeur spectrale.	Citer l'ordre de grandeur du temps de cohérence Δt de quelques radiations visibles. Utiliser la relation $\Delta f. \Delta t \sim 1$ pour relier le temps de cohérence à la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la radiation.
Récepteurs. Intensité de la lumière.	Relier l'intensité à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique. Citer l'ordre de grandeur du temps de réponse de quelques récepteurs de lumière. **Mettre en œuvre des expériences utilisant un capteur photographique numérique.**

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », la formule de Fresnel, admise en classe de première année, est démontrée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition de deux ondes incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.

Superposition de deux ondes monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel. Facteur de contraste.	Citer les principales conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse (ondes quasi synchrones, déphasage constant dans le temps ou très lentement variable). Établir et utiliser la formule de Fresnel. Associer un bon contraste à des ondes d'intensités voisines.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young** », les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'Young peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.

3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	
Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source ponctuelle à distance finie et observation à grande distance. Champ d'interférences. Ordre d'interférences.	Définir, exprimer et utiliser l'interfrange et l'ordre d'interférences. Justifier que les franges ne sont pas localisées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position du point d'observation ; franges d'interférences.	Interpréter la forme des franges observées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position d'un point source. Perte de contraste par élargissement angulaire de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférence.
Variations de l'ordre d'interférence avec la longueur d'onde. Perte de contraste par élargissement spectral de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférence.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue** », l'étude de l'interféromètre de Michelson en lame d'air permet de confronter théorie et expérience. L'étude de l'interféromètre de Michelson en coin d'air est abordée de manière exclusivement expérimentale. Pour la modélisation d'un interféromètre de Michelson, on suppose la séparatrice infiniment mince.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue	
Interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue. Localisation (admise) des franges.	Citer les conditions d'éclairage et d'observation en lame d'air et en coin d'air.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Lame d'air : franges d'égale inclinaison.	Établir et utiliser l'expression de la différence de marche en fonction de l'épaisseur de la lame d'air équivalente et de l'angle d'incidence des rayons. **Régler un interféromètre de Michelson pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole proposé.** **Mettre en œuvre un protocole pour accéder au profil spectral d'une raie ou d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**
Coin d'air : franges d'égale épaisseur.	Utiliser l'expression admise de la différence de marche en fonction de l'épaisseur. **Caractériser la géométrie d'un objet ou l'indice d'un milieu à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**

4. Électromagnétisme

Le programme d'électromagnétisme de la filière MPI s'inscrit dans le prolongement du thème « Ondes et signaux » du programme de MPII, option systèmes informatiques. Il s'agit pour les étudiants de découvrir les lois locales et intégrales qui gouvernent les champs électrique et magnétique et les phénomènes que ces lois permettent de modéliser, notamment dans le domaine des ondes électromagnétiques.

L'étude des champs électrostatique et magnétostatique est présentée en deux parties distinctes ; l'enseignant est libre, s'il le souhaite, de procéder à une présentation unifiée de la notion de champ statique. Pour les calculs de champs, l'accent est mis sur les situations à haut degré de symétrie qui permettent l'utilisation efficace des propriétés de flux ou de circulation. Les équations locales des champs statiques sont introduites comme cas particuliers des équations de Maxwell.

La loi de Biot et Savart, les notions de potentiel vecteur et d'angle solide ne relèvent pas du programme.
Les relations de passage relatives au champ électromagnétique peuvent être exploitées mais doivent être systématiquement rappelées.

La partie « **Électrostatique** » constitue un approfondissement des lois quantitatives qui régissent le champ électrostatique. Les notions abordées sont donc centrées sur l'essentiel : distributions de charges, champ et potentiel. Pour le champ électrostatique et le potentiel, on se limite aux expressions dans le cas de charges ponctuelles.
L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie ; ce dernier est admis.
Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées.
Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme.
Une approche énergétique est conduite dans un cas simple : une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Le dipôle est traité, l'accent est mis sur les effets qualitatifs.
Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique.	Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Relier les densités de charges de deux types de distributions modélisant une même situation. Déterminer la charge totale d'une distribution continue dans des situations simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Opérateur gradient.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Citer l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes. Déterminer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Déterminer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans des cas simples.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss.
Systèmes modélisés par une sphère, un cylindre infini ou un plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et énoncer qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Étude du condensateur plan modélisé comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	Établir et citer l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Notion de dipôle électrostatique, moment dipolaire.	Exprimer le moment dipolaire d'un doublet de charges. Évaluer des ordres de grandeur dans le domaine microscopique.
Champ et potentiel créés par un dipôle électrostatique.	Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles d'un dipôle électrostatique. Établir et exploiter les expressions du champ et du potentiel créés par un doublet de charges dans l'approximation dipolaire.
Dipôle électrostatique placé dans un champ électrostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur. Établir et exploiter les expressions des actions mécaniques subies par un doublet de charges dans un champ électrostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.
Analogies avec la gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss de la gravitation.

La partie « **Magnétostatique** » s'appuie sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de la classe de MPII option sciences informatiques. Les étudiants sont déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique lors de l'étude des phénomènes d'induction. Il s'agit ici de préciser les propriétés de ce champ, avec l'analyse des symétries et des invariances de la distribution, ainsi qu'avec l'utilisation du théorème d'Ampère pour la détermination d'un champ magnétique.
La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue.
Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.

Les propriétés des dipôles magnétiques, sont précisées, notamment en ce qui concerne le champ magnétostatique créé et les actions subies lorsque le dipôle magnétique est placé dans un champ magnétostatique extérieur. On peut, sur ce thème, souligner les analogies avec l'électrostatique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2. Magnétostatique	
Courant électrique. Vecteur densité de courant volumique. Distributions de courant électrique filiformes.	Déterminer l'intensité du courant électrique traversent une surface orientée.
Symétries et invariances du champ magnétostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants. Identifier les invariances d'une distribution de courants. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour caractériser le champ magnétostatique créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Citer quelques ordres de grandeur de champs magnétostatiques.
Applications au fil rectiligne « infini » de section non nulle et au solénoïde « infini ».	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.
Notion de dipôle magnétique. Moment magnétique.	Exprimer le moment magnétique d'une boucle de courant plane. Évaluer des ordres de grandeur dans les domaines macroscopique et microscopique.
Champ créé par un dipôle magnétique.	Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ d'un dipôle magnétique. Exploiter l'expression fournie du champ créé par un dipôle magnétique.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle passif placé dans un champ magnétostatique extérieur. Exploiter les expressions fournies des actions mécaniques subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.

Dans la partie « **Équations de Maxwell** » une vision unifiée des lois de l'électromagnétisme est présentée. Elle conduit à une première approche quantitative du phénomène de propagation et permet également de revenir sur les lois de l'induction étudiées en classe de MPII, option sciences informatiques.
Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Équations de Maxwell	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Associer qualitativement le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de la conservation de la charge.
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. Exprimer par analogie les équations de Poisson et de Laplace dans le cas de la gravitation. Capacité numérique **:** à l'aide d'un langage de programmation résoudre numériquement l'équation de Laplace à une ou deux dimensions, les conditions aux limites étant fixées.

Dans la partie « **Énergie du champ électromagnétique** », aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4. Énergie du champ électromagnétique	
Force électromagnétique volumique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; puissance volumique dissipée par effet Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Énergie électromagnétique volumique. Vecteur de Poynting. Bilan d'énergie.	Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (flux solaire, laser…). Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant fournie.

La partie « **Propagation et rayonnement** » est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.
Si le modèle de l'onde plane est présenté dans le cadre de l'espace vide, les études des ondes électromagnétiques dans un plasma ainsi que dans un milieu ohmique permettent d'illustrer l'importance des couplages entre les champs, les charges et les courants. Elles sont également l'occasion d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant, par exemple, l'effet de peau, le phénomène de dispersion, les notions de vitesse de groupe et de phase, de fréquence de coupure ou encore d'onde évanescente.
La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait permet d'aborder la notion d'onde stationnaire. L'importance des conditions aux limites imposées sur la quantification des solutions est soulignée. La notion de densité de courant surfacique est introduite mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.
L'étude du rayonnement dipolaire repose sur l'analyse et l'exploitation des expressions des champs, qui sont admises.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5. Propagation et rayonnement	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Onde plane progressive monochromatique. Relation de dispersion.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Déterminer la relation de dispersion. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ou circulairement.	Reconnaître une onde polarisée rectilignement ou circulairement. **Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.**
Onde plane transverse électrique monochromatique dans un plasma dilué. Conductivité complexe du milieu. Pulsation de coupure. Ondes évanescentes.	Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion. Décrire le phénomène de dispersion. Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère. Distinguer qualitativement les ondes évanescentes et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.
Vitesse de phase, vitesse de groupe.	Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Citer une interprétation de la vitesse de groupe en s'appuyant sur l'analyse qualitative d'un exemple.
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau.	Établir et interpréter l'expression de la longueur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. **Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.**
Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement. Puissance rayonnée.	Justifier l'intérêt du modèle du dipôle oscillant et citer des exemples dans différents domaines. Formuler et commenter les approximations reliant les trois échelles de longueur pertinentes. Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné, les expressions des champs étant fournies, en utilisant des arguments généraux : symétrie, conservation de l'énergie et

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

	analyse dimensionnelle. Effectuer un bilan énergétique, les expressions des champs étant fournies. Représenter l'indicatrice de rayonnement. **Détecter une onde électromagnétique rayonnée.**

5. Thermodynamique : transferts thermiques

Le programme de thermodynamique de la classe de MPI est consacré à l'étude des transferts thermiques.
Dans le cas de la diffusion thermique, la mise en équation est limitée au cas des solides ; on peut utiliser les résultats ainsi établis dans d'autres situations, notamment dans des fluides, en affirmant la généralisation des équations obtenues dans les solides. Les mises en équations locales sont faites exclusivement sur des géométries où une seule variable d'espace intervient. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle. Enfin, aucune connaissance spécifique sur les solutions d'une équation de diffusion ne figure au programme.
La loi de Newton à l'interface entre un solide et un fluide est introduite.
Les transferts thermiques par rayonnement sont abordés sans formalisme excessif, la loi de Planck n'étant pas exigible. L'effet de serre est étudié quantitativement dans un modèle simple à une couche, dont les limites peuvent être soulignées quand il est appliqué à l'atmosphère terrestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Conduction, convection et rayonnement.	Reconnaître un mode de transfert thermique. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.**
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique.	Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.
Premier principe de la thermodynamique.	Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.
Loi de Fourier.	Interpréter et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. **Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.**

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur Laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Régime stationnaire. Résistance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.
Coefficient de transfert thermique de surface, loi de Newton.	Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.
Approche descriptive du rayonnement thermique dans le cas d'un corps noir. Loi de Wien. Loi de Stefan. Effet de serre.	Exploiter les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan. Analyser quantitativement l'effet de serre en s'appuyant sur un bilan énergétique sur un modèle à une couche.

6. Physique quantique

Cette partie s'inscrit dans le prolongement de l'introduction à la physique quantique traitée en classe de MPII, option sciences informatiques. Il s'agit cependant de dépasser l'approche descriptive et qualitative et de donner aux étudiants leurs premiers outils quantitatifs d'analyse. Le cœur de cet enseignement est construit sur la mécanique ondulatoire de Schrödinger et propose des résolutions d'exemples simples mais fondamentaux pour la bonne compréhension de problèmes plus complexes : particule dans une marche de potentiel et effet tunnel, particule dans un puits de potentiel infini et quantification de l'énergie d'une particule confinée. L'accent doit être mis sur l'interprétation et l'exploitation des résultats et non pas sur les calculs, non exigibles pour l'exemple plus délicat de la barrière de potentiel. Le professeur peut au contraire, s'il le souhaite, proposer des analyses de graphes, des exploitations de formules analytiques fournies, des estimations numériques, des simulations… afin d'aborder des modélisations plus réalistes.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.1. Fonction d'onde et équation de Schrödinger	
Fonction d'onde ψ d'une particule sans spin et densité de probabilité de présence.	Interpréter en termes de probabilité l'amplitude d'une onde associée à une particule.
Équation de Schrödinger à une dimension dans un potentiel V(x).	Utiliser le caractère linéaire de l'équation (principe de superposition).
États stationnaires de l'équation de Schrödinger.	Procéder à la séparation des variables temps et espace. Distinguer l'onde associée à un état stationnaire en mécanique quantique d'une onde stationnaire au sens usuel de la physique des ondes. Relier l'énergie de la particule à l'évolution temporelle de sa fonction d'onde et faire le lien avec la relation de Planck-Einstein. Identifier le terme associé à l'énergie cinétique.
6.2. Particule libre	
Fonction d'onde d'une particule libre non localisée.	Établir les solutions. Interpréter la difficulté de normalisation de cette fonction d'onde.
Relation de de Broglie.	Relier l'énergie de la particule et le vecteur d'onde de l'onde plane associée.
Inégalité d'Heisenberg spatiale et paquet d'ondes.	Expliquer, en s'appuyant sur l'inégalité d'Heisenberg spatiale, que la localisation de la particule peut s'obtenir par superposition d'ondes planes.
6.3. États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux	
États stationnaires d'une particule dans le cas d'une marche de potentiel.	Citer des exemples physiques illustrant cette problématique. Exploiter les conditions de continuité (admises) relatives à la fonction d'onde. Établir la solution dans le cas d'une particule incidente sur une marche de potentiel. Expliquer les différences de comportement par rapport à une particule classique Identifier une onde évanescente et la caractériser.
Barrière de potentiel et effet tunnel.	Décrire qualitativement influence de la hauteur et de la largeur de la barrière de potentiel sur l'effet tunnel. Citer des applications.
États stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini.	Établir les solutions et les niveaux d'énergie de la particule confinée. Identifier des analogies avec d'autres domaines de la physique.
Énergie de confinement.	Estimer l'énergie d'une particule confinée dans son état fondamental pour un puits non rectangulaire. Associer l'analyse à l'inégalité d'Heisenberg.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

6.4. États non stationnaires d’une particule dans un puits de potentiel infini	
Combinaison linéaire d’états stationnaires.	Expliquer qu’une superposition de deux états stationnaires engendre une évolution au cours du temps de l’état de la particule. Établir l’expression de la densité de probabilité de présence de la particule dans le cas d’une superposition de deux états stationnaires ; interpréter le résultat.

7. Transformation de la matière

L’objectif de cette partie est d’amener les étudiants à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie quotidienne, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

Les concepts développés permettent l’étude quantitative de l’état final d’un système, siège d’une transformation chimique, à partir d’une modélisation par une seule réaction chimique. Cette réaction est décrite de manière symbolique par une équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d’équilibre. Il s’agit de prévoir le sens d’évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l’état final.

Ces études portent plus spécifiquement sur les transformations chimiques en solution aqueuse notamment sur des transformations modélisées par des réactions acide-base et d’oxydo-réduction. Ces dernières interviennent dans de nombreux développements technologiques et lors d’analyses de qualité et de conformité : générateurs électrochimiques, traitement des eaux, analyses environnementales, lutte contre la corrosion… On évite tout calcul inutile de concentration et de pH, en privilégiant l’utilisation des diagrammes de prédominance ou de distribution pour valider le choix de la réaction qui modélise au mieux la situation. Aucune formule de calcul de pH n’est exigible.

Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental contribuent à contextualiser ces enseignements et constituent une nouvelle occasion d’aborder la thématique « Mesure et incertitudes ». Les titrages sont étudiés exclusivement en travaux pratiques dans le cadre de situations authentiques présentant un intérêt en termes d’analyses.

Notions et contenus	Capacités exigibles
7.1 Transformations chimiques d’un système	
Espèces physico-chimiques. Entités chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système et leur quantité de matière. Attribuer à une espèce physico-chimique une formule brute et un état physique.
Modélisation d’une transformation au niveau macroscopique par une réaction : équation de réaction.	Écrire l’équation de la réaction qui modélise une transformation chimique.
État final d’un système siège d’une transformation : transformation totale ou non totale, équilibre chimique.	Distinguer une transformation totale d’une transformation aboutissant à un état d’équilibre chimique. Exprimer l’activité d’une espèce chimique pure, en phase condensée ou très diluée en

© Ministère de l’enseignement supérieur, de la recherche et de l’innovation, 2021

	solution aqueuse. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées.
Évolution d'un système, siège d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient de réaction, constante thermodynamique d'équilibre. Critère d'évolution spontanée, état final.	Déterminer le quotient de réaction dans l'état initial et dans l'état final, à partir de données. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. **Déterminer une constante thermodynamique d'équilibre.**
7.2 Acides et bases, réactions acide-base	
pH d'une solution aqueuse. Transformation modélisée par une réaction acide-base. Couples acide-base, constante d'acidité ; acides et bases fort(e)s ou faibles dans l'eau ; diagramme de prédominance et courbes de distribution. Indicateurs colorés.	Écrire l'équation d'une réaction acide-base et déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction acide-base à partir des pKa des couples acide-base mis en jeu. Utiliser un diagramme de prédominance pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Interpréter et exploiter un diagramme de distribution. **Réaliser un titrage ayant pour réaction support une réaction acide-base.**
7.3 Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction	
Transformation modélisée par une réaction d'oxydo-réduction. Couple oxydant-réducteur. Nombre d'oxydation**.**	Identifier un transfert d'électrons et écrire une réaction d'oxydo-réduction à partir de données expérimentales ou des couples oxydant-réducteurs mis en jeu. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.
Pile, demi-piles, pont salin, tension à vide, réactions électrochimiques aux électrodes. Potentiel d'électrode, potentiel standard, relation de Nernst, électrode standard à hydrogène.	Justifier la séparation des réactifs dans deux demi-piles et l'utilisation d'un pont salin. Exploiter la relation de Nernst. Modéliser et schématiser le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode, ou à partir d'une mesure d'intensité de courant. **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Domaine de prédominance. Force comparée des oxydants et des réducteurs.	Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Usure d'une pile. Capacité électrique d'une pile.	Déterminer la composition chimique d'une pile ayant fonctionné pendant une durée déterminée, l'intensité du courant étant fournie. Évaluer la capacité électrique d'une pile connaissant sa composition initiale.

Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique chimie de la classe de MPII, option sciences informatiques. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une aide.

1. Domaine optique

- Polariseur.
- Interféromètre de Michelson motorisé.
- Capteur photographique numérique.
- Spectromètre à fibre optique.

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre.
- Carte d'acquisition dont l'API est publiée.
- Microcontrôleur.
- Circuits intégrés comportant des portes logiques

3. Domaine thermodynamique

- Caméra thermique

4. Domaine transformation de la matière

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation.
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Ampèremètre, voltmètre et électrodes de référence
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de MPI sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de MPII option sciences informatiques et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année, l'expression des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Le thème « Analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « Séries de Fourier » abordée en MPII option sciences informatiques et réutilisée en classe de MPI, on étend la décomposition d'un signal périodique comme somme de ses harmoniques à l'expression d'un signal non périodique sous forme d'une intégrale (synthèse spectrale) ; aucun résultat n'est exigible. On souligne en revanche la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Dans le thème « Équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent est mis sur le rôle des conditions aux limites.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse vectorielle	
Gradient.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$.
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ ou à $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)$.	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\mathbf{k}$.
2. Analyse de Fourier	
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Synthèse spectrale d'un signal non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert, équation de Schrödinger.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique-chimie de première année de la classe de MPII, option sciences informatiques.

Domaines numériques	Capacités exigibles
Transformée de Fourier discrète.	Calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal à valeurs réelles en utilisant la fonction **rfft** de la bibliothèque **numpy.fft** (sa spécification étant donnée).
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.
Équation de Laplace à une ou deux dimensions.	Choisir un pas spatial adapté à la résolution numérique d'une équation de Laplace dans un contexte physique donné. Implémenter un schéma itératif fourni pour résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique-chimie de première année de la classe de MPII, option sciences informatiques.

Domaines numériques	**Capacités exigibles**
Transformée de Fourier discrète.	Calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal à valeurs réelles en utilisant la fonction **rfft** de la bibliothèque **numpy.fft** (sa spécification étant donnée).
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.
Équation de Laplace à une ou deux dimensions.	Choisir un pas spatial adapté à la résolution numérique d'une équation de Laplace dans un contexte physique donné. Implémenter un schéma itératif fourni pour résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Enseignements secondaire et supérieur

Parcoursup

Calendrier de la procédure nationale de préinscription pour l'accès aux formations initiales du premier cycle de l'enseignement supérieur en Nouvelle-Calédonie - session 2021-2022

NOR : ESRS2121677A
arrêté du 29-7-2021 - JO du 1-8-2021
MESRI - DGESIP A-MOSS

Vu Code de l'éducation, notamment articles L. 684-2 et D. 612-1-2

Article 1 - Pour l'accès aux formations initiales du premier cycle de l'enseignement supérieur en Nouvelle-Calédonie, le calendrier de la procédure nationale de préinscription est adapté dans les conditions fixées par le présent arrêté.

Article 2 - La phase principale est ouverte sur la plateforme Parcoursup du 26 août 2021 jusqu'au 23 décembre 2021 inclus. Elle comprend :
1° La phase de dépôt des vœux, ouverte jusqu'au 1er octobre 2021 à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie) ;
2° La phase de confirmation des vœux, ouverte jusqu'au 13 octobre 2021 à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie) ;
3° La phase d'examen des vœux et de saisie des données d'appel par les établissements proposant des formations inscrites sur la plateforme, ouverte du 19 octobre 2021 au 19 novembre 2021 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie) ;
4° La phase de vérification des classements et données d'appel, ouverte du 22 novembre 2021 au 24 novembre 2021 à 18 heures (heure de Nouvelle-Calédonie) ;
5° La phase de réponse des établissements et de choix des candidats, ouverte du 26 novembre 2021 au 23 décembre 2021 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie).

Article 3 - La date limite pour modifier le nombre de sous-vœux d'un vœu multiple à dossier unique donnant lieu à un classement commun mentionnée au dernier alinéa de l'article D. 612-1-11 du Code de l'éducation est le 19 novembre 2021 à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie).

Article 4 - Durant la phase définie au 5° de l'article 2, les propositions d'admission faites par les établissements sont portées à la connaissance des candidats sur la plateforme Parcoursup.
1° Les candidats indiquent s'ils acceptent ou refusent les propositions faites par les établissements au plus tard à la fin du quatrième jour qui suit celui au cours duquel une proposition leur est faite, lorsque cette dernière est reçue le 26 novembre 2021.
2° Les candidats indiquent s'ils acceptent ou refusent les propositions faites par les établissements à partir du 27 novembre 2021 :
- le 30 novembre 2021 à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie), pour une proposition reçue le 27 novembre 2021 ;
- à la fin du deuxième jour qui suit celui au cours duquel une proposition leur est faite, lorsque cette dernière intervient entre le 28 novembre 2021 et le 21 décembre 2021 inclus.

Article 5 - Le délai supplémentaire au terme duquel le candidat peut, en application de la deuxième phrase du deuxième alinéa du III de l'article D. 612-1-14 du Code de l'éducation, confirmer le maintien de ses vœux ou des placements sur liste d'attente dont il bénéficie est de cinq jours.
Ce délai commence à courir le jour suivant l'expiration de l'un des délais mentionnés à l'article 4.

Article 6 - La possibilité, mentionnée au IV de l'article D. 612-1-14 du Code de l'éducation, d'ordonner les vœux sur la plateforme afin que toute proposition d'admission adressée au candidat soit, selon l'ordre de priorité qu'il a défini, automatiquement acceptée, est ouverte à compter du 27 novembre 2021.

Article 7 - I.- La date jusqu'à laquelle les propositions d'admission formulées, au titre du VI de l'article D. 612-1-14 du Code de l'éducation, sont portées à la connaissance des candidats, dès que la plateforme Parcoursup est informée de l'absence d'inscription, du désistement ou de la démission d'un candidat pour la formation correspondante, est le 14 février 2022.
Conformément au VI de l'article D. 612-1-14 du Code de l'éducation, au-delà de cette date, les propositions d'admission éventuellement formulées via la plateforme Parcoursup le sont sur décision du chef d'établissement, sans préjudice des propositions formulées par le vice-recteur de Nouvelle-Calédonie dans le cadre de la procédure d'accompagnement prévue au VIII de l'article L. 612-3 du Code de l'éducation.
II.- Les candidats indiquent s'ils acceptent ou refusent les propositions faites conformément au VI de l'article D. 612-1-14 du Code de l'éducation :
- au plus tard le 8 février 2022, à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie), pour une proposition reçue entre le 28 décembre 2021 et le 6 février 2021 inclus ;
- le 8 février 2022, à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie), pour une proposition reçue le 7 février 2022 ;
- au plus tard à la fin du jour (23 h 59, heure de Nouvelle-Calédonie) au cours duquel une proposition leur est faite, lorsque cette dernière intervient entre le 8 février 2022 et le 19 février 2022 inclus.

Article 8 - La phase complémentaire est ouverte sur la plateforme Parcoursup du 15 décembre 2021 jusqu'au 19 février 2022 inclus. Elle comprend :
1° La phase de dépôt des vœux sur les places vacantes au sens de l'article D. 612-1-1 du Code de l'éducation, ouverte jusqu'au 17 février 2022, à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie) ;
2° La phase d'examen des vœux et de réponse des établissements proposant des formations inscrites sur la plateforme, ouverte jusqu'au 18 février 2022 inclus ;
3° La phase d'envoi des propositions est ouverte jusqu'au 19 février 2022 inclus ;
4° La phase de choix des candidats, ouverte jusqu'au 19 février 2022, 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie).

Article 9 - Le délai maximum laissé aux établissements, en application de l'article D. 612-1-20 du Code de l'éducation, pour répondre à une candidature formulée en phase complémentaire expire :
a) au plus tard à la fin du premier jour qui suit l'enregistrement du vœu, lorsque la formation ne relève pas du VI de l'article L. 612-3 du Code de l'éducation et que la réponse n'est pas subordonnée à l'acceptation par le candidat d'un dispositif d'accompagnement pédagogique ou d'un parcours de formation personnalisé, tel que mentionné à l'article D. 612-1-14 du Code de l'éducation ;
b) à la fin du huitième jour qui suit l'enregistrement du vœu dans les autres cas. Toutefois, ce délai s'entend sous réserve de ne pas dépasser le 18 février 2022 à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie) afin de tenir compte de la date de fin de la phase complémentaire mentionnée à l'article 8.

Article 10 - I. - Durant la phase complémentaire, les propositions d'admission faites par les établissements sont portées à la connaissance des candidats sur la plateforme Parcoursup.
Les candidats indiquent s'ils acceptent ou refusent les propositions faites par les établissements au plus tard :
- à la fin du deuxième jour qui suit celui au cours duquel une proposition leur est faite lorsque cette dernière intervient entre le 15 décembre 2021 et le 6 février 2022 inclus ;
- le 8 février 2022 à 23 h 59 (heure de Nouvelle-Calédonie), pour une proposition reçue le 7 février 2022 ;
- à la fin du jour (23 h 59, heure de Nouvelle-Calédonie) au cours duquel une proposition leur est faite lorsque cette dernière intervient entre le 8 février 2022 et le 19 février 2022.
II. - Les délais mentionnés au I sont applicables au candidat auquel le vice-recteur fait une proposition d'inscription sur le fondement du deuxième alinéa de l'article D. 612-1-24 du Code de l'éducation.
Par exception au cinquième alinéa du I, le candidat auquel le vice-recteur fait une proposition d'inscription indique s'il accepte ou refuse la proposition à la fin du premier jour qui suit celui au cours duquel la proposition lui est faite, lorsque cette dernière intervient entre le 8 février 2022 et la fin de la phase d'accompagnement prévue au titre de l'article VIII de l'article L. 612-3 du Code de l'éducation.

Article 11 - La date mentionnée au deuxième alinéa du I de l'article D. 612-1-23 du Code de l'éducation est le 26 novembre 2021.
La date mentionnée au troisième alinéa du I de l'article D. 612-1-23 du Code de l'éducation à partir de laquelle les candidats, n'ayant reçu aucune proposition d'admission à leurs demandes d'inscription formulées dans le cadre de la phase principale ou de la phase complémentaire, peuvent demander le bénéfice d'un accompagnement est le 15 décembre 2021.

Article 12 - Le délai supplémentaire au terme duquel le candidat qui n'a pas répondu dans le délai imparti à

une proposition d'admission qui lui a été faite au titre de la phase complémentaire doit, en application de la deuxième phrase du deuxième alinéa du III de l'article D. 612-1-14 du Code de l'éducation, confirmer le maintien de ses autres vœux ou des placements sur liste d'attente dont il bénéficie sur la plateforme Parcoursup est de cinq jours.
Ce délai commence à courir le jour suivant l'expiration de l'un des délais mentionnés à l'article 10.

Article 13 - Conformément au deuxième alinéa de l'article D. 612-1-9 du Code de l'éducation, les établissements signalent, sur la plateforme, le jour de la rentrée fixé par l'établissement, les places restées vacantes dans les formations qu'ils dispensent, lorsqu'un candidat ne se présente pas, sans justification valable, le jour de la rentrée fixé par l'établissement.

Article 14 - L'arrêté du 30 juillet 2020 relatif au calendrier de la procédure nationale de préinscription pour l'accès aux formations initiales du premier cycle de l'enseignement supérieur en Nouvelle-Calédonie est abrogé.

Article 15 - La directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle et le vice-recteur de Nouvelle-Calédonie sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le 29 juillet 2021

La ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation,
Frédérique Vidal

Enseignements secondaire et supérieur

Brevet de technicien supérieur

Thème concernant l'enseignement de culture audiovisuelle et artistique du brevet de technicien supérieur métiers de l'audiovisuel - session 2023

NOR : ESRS2122176N
note de service du 19-7-2021
MESRI - DGESIP A1-2

Texte adressé aux recteurs et rectrices de région académique, chanceliers et chancelières des universités ; aux recteurs délégués et rectrices déléguées pour l'enseignement supérieur, la recherche et l'innovation ; aux recteurs et rectrices d'académie ; aux vice-recteurs ; aux inspecteurs et inspectrices d'académie-inspecteurs et inspectrices pédagogiques régionaux ; au directeur du Cned ; au directeur du Siec d'Île-de-France ; aux cheffes et chefs d'établissement

L'arrêté du 4 juin 2013 modifié portant création et fixant les conditions de délivrance du brevet de technicien métiers de l'audiovisuel, paru au Journal officiel de la République française le 13 juillet 2013, prévoit un programme de culture audiovisuelle et artistique qui comporte une thématique et une dizaine de références à étudier durant les deux années de formation.
L'intitulé et les indications bibliographiques de ce thème sont présentés en annexe. Il est rappelé que la bibliographie et la filmographie de cette annexe restent indicatives.

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Pour la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle, et par délégation,
La cheffe du service de la stratégie des formations et de la vie étudiante, adjointe à la directrice générale,
Isabelle Prat

Annexe

Thème : Le corps

La bibliographie et la filmographie indicatives permettent de travailler, notamment, les axes suivants :
- les représentations du corps dans les arts et dans les médias ;
- l'imaginaire et l'imagerie du corps et leur portée anthropologique ;
- la place du corps de l'auteur dans l'acte de création ; celle du corps du spectateur dans la réception.

Textes de référence

Vincent Amiel, *Le Corps au cinéma : Keaton, Bresson, Cassavetes*, PUF, 1998
Daniel Arasse, *L'Annonciation italienne, une histoire de perspective*, Hazan, 1999
Paul Ardenne, *L'Image corps. Figures de l'humain dans l'art du XXe siècle*, 2001, éditions du Regard
Raymond Bellour, *Le Corps du cinéma*, P.O.L., 2009
Nicole Brenez, *De la figure en général et du corps en particulier*, De Boeck, 1998
Philippe Comar, *Les Images du corps*, collection Découvertes Gallimard, n° 185, 1993
Georges Didi-Huberman, *Ouvrir Vénus*, collection Le Temps des images, Gallimard, 1999
Stéphane Dumas, *Les Peaux créatrices. Esthétique de la sécrétion*, Klincksieck, 2014
Umberto Galimberti, *Les Raisons du corps*, traduit de l'italien par Marilène Raiola, Grasset-Mollat, 1998
Olivier Mongin, *Éclats de rire. Variations sur le corps comique, essai sur les passions démocratiques, tome III*, éditions du Seuil, 2002
Claude Reichler (dir.), *Le Corps et ses fictions*, Les Éditions de Minuit, 1983

Textes littéraires et romans graphiques

Samuel Beckett, *Oh les beaux jours*, 1961, ou *Fin de partie*, 1957, Les Éditions de Minuit
Théophile Gauthier, *Arria Marcella*, 1852, ou *La Morte amoureuse*, 1836
Hervé Guibert, *Le Protocole compassionnel*, 1991, Gallimard
Michel Houellebecq, *Les Particules élémentaires*, éditions J'ai lu, 2019

Victor Hugo, *Notre-Dame de Paris*, I, 5, « Quasimodo », 1831
Édouard Louis, *Qui a tué mon père*, éditions du Seuil, 2018
Clément Marot, *Blasons anatomiques du corps féminin*, suivi des *Contreblasons*, GF Flammarion, 2016
Michel de Montaigne, *Essais*, III, 13, « De l'expérience »
Ovide, *Les Métamorphoses*, Ier siècle
Edgar Allan Poe, *Le Portrait ovale*, 1842
Mary Shelley, *Frankenstein ou le Prométhée moderne*, 1818
Joy Sorman, *La Peau de l'ours*, 2014, Gallimard
Bastien Vivès, *Polina* (roman graphique), Casterman, 2011

Documents iconographiques et références plastiques

Aux origines du cinéma scientifique et de la photographie, Cnrs images, 1984-1989
Marina Abramovic, *The Artist is present*, Moma, 2010, ou *Rhythm O*
Francis Bacon, *Trois études de dos d'homme*, éléments d'un diptyque, 1970
Joseph Beuys, *I like America and America likes me*, 1974
Eugène Delacroix, *La Mort de Sardanapale*, 1827
Léonard de Vinci, *L'Homme de Vitruve,* vers 1490, ou Le Corbusier, le *Modulor*, 1948
Masaccio, *Adam et Ève chassés du paradis*, 1425
Félix-Jacques Moulin, la série des *Nus allongés*, 1852
Ron Mueck, *Wild Man*, 2005
Auguste Rodin, *Danseuses* (sculptures et dessins)
Pierre Paul Rubens, *Le Christ à la paille*, 1618 ou *Les Trois Grâces*, 1630-1635
Niki de Saint Phalle, *Hon/Elle*, 1966
Cindy Sherman, les séries *Civil war* ou *Sex pictures*
Joel-Peter Witkin, *Photopoche*, n° 49, 2008

Documents filmiques et audiovisuels

Alexandre Aja, *Oxygène*, 2021
Matthew Barney, *Cremaster 4*, 1994
Sophie Bruneau, Marc-Antoine Roudil, *Ils ne mouraient pas tous mais tous étaient frappés*, 2005
Alain Cavalier, *Irène*, 2008
Jérémy Clapin, *J'ai perdu mon corps*, 2019
Clément Cogitore (mise en scène de), *Les Indes galantes* de Jean-Philippe Rameau, 2017
David Cronenberg, *La Mouche*, 1986
Claire Denis, *Beau travail*, 1999
Brian De Palma, *Body Double*, 1984
Paul Greengrass, *La Mort dans la peau*, 2004
Hervé Guibert, *La Pudeur ou l'impudeur*, 1992
David Lynch, *Elephant Man*, 1980
Kiyoshi Kurosawa, *Le Secret de la chambre noire*, 2016
Im Kwon-taek, *Ivre de femmes et de peinture*, 2002
Louis Malle, *Humain, trop humain*, 1974
Mamoru Oshii, *Avalon*, 2001
Jacques Rivette, *La Belle Noiseuse*, 1991
Albert Serra, *La Mort de Louis XIV*, 2017
Jacques Tourneur, *La Féline*, 1942
Billy Wilder, *Certains l'aiment chaud*, 1959
Ryan Murphy, *Nip/Tuck*, saison 1, 2003
Steven Soderbergh, *The Knick*, saison 1, 2014

Documents sonores

Antonin Artaud, *Pour en finir avec le jugement de Dieu*, 1947 (émission radiophonique), Harmonia mundi, CD, 2001
« Le corps antenne », dans l'émission Les ateliers de la création, France Culture, podcast : https://www.franceculture.fr/emissions/latelier-de-la-creation-14-15/le-corps-antenne
Abel Meeropol, le poème « Strange Fruit » chanté par Billie Holiday ou Nina Simone (sur le corps « racisé » et supplicié)

Sitographie

Site de l'artiste Orlan : http://www.orlan.eu
Visite virtuelle de la chapelle Sixtine :
www.museivaticani.va/content/museivaticani/fr/collezioni/musei/cappella-sistina/tour-virtuale.html

Personnels

Promotion de grade

Accès à l'échelon exceptionnel de la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers - année 2021

NOR : ESRH2121751N
note de service du 28-6-2021
MESRI - DGRH A2-2

Texte adressé aux présidentes et présidents d'université ; aux directeurs et directrices d'établissement d'enseignement supérieur ; aux recteurs et rectrices d'académie, chanceliers et chancelières des universités

La présente note de service a pour objet les modalités d'accès à l'échelon exceptionnel de la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers, créé par le décret n° 2017-852 du 6 mai 2017 portant diverses dispositions statutaires relatives aux directeurs de recherche, chargés de recherche, ingénieurs de recherche, ingénieurs d'études et assistants ingénieurs relevant du décret n° 83-1260 du 30 décembre 1983 et du décret n° 85-1534 du 31 décembre 1985 et aux personnels des bibliothèques, corps assimilés aux corps d'enseignants-chercheurs et professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers.
La loi n° 2019-828 du 6 août 2019 de transformation de la fonction publique a modifié en profondeur les attributions des commissions administratives paritaires (CAP), dont les compétences sont recentrées essentiellement sur l'examen des décisions individuelles défavorables (licenciement pour insuffisance professionnelle, révision du compte rendu d'entretien professionnel, refus de trois postes suite à réintégration après disponibilité). Ainsi, depuis le 1er janvier 2020, elles ne sont plus compétentes pour l'examen des mutations et depuis le 1er janvier 2021, elles perdent leurs attributions en matière d'avancement et de promotions.
Le décret n° 2019-1265 du 29 novembre 2019 relatif aux lignes directrices de gestion et à l'évolution des attributions des commissions administratives paritaires précise les règles et procédures pour l'édiction des lignes directrices de gestion (LDG) notamment en matière de promotion et de valorisation des parcours.
Les LDG ministérielles publiées au Bulletin officiel n° 44 du 19 novembre 2020 permettent de préciser les modalités de prise en compte de la valeur professionnelle et des acquis de l'expérience professionnelle des agents, notamment à travers la diversité du parcours et des fonctions exercées, les formations suivies, les conditions particulières d'exercice, attestant de l'engagement professionnel, de la capacité d'adaptation et, le cas échéant, de l'aptitude à l'encadrement d'équipes. Elles visent également à assurer l'égalité entre les femmes et les hommes dans les procédures de promotion en tenant compte de la part respective des femmes et des hommes dans les corps et grades concernés.

I - Personnels concernés

Conformément aux dispositions de l'article 15-1 du décret n° 88-651 du 6 mai 1988 modifié, les professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers peuvent être promus à l'échelon exceptionnel de la hors-classe des professeurs de l'Ensam.
Peuvent être promus à l'échelon exceptionnel de la hors-classe du corps des professeurs de l'Ensam, les professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers, quel que soit leur établissement d'affectation, justifiant d'au moins trois ans de services effectifs dans le 6e échelon de la hors-classe au plus tard le 31 décembre 2021 pour les promotions à attribuer au titre de l'année 2021, et inscrits sur un tableau d'avancement commun à toutes les disciplines.
Conformément aux termes des LDG ministérielles, les dossiers des candidats à cet échelon seront examinés par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, au regard, notamment, des critères suivants : la qualité du dossier déposé par le candidat, l'expérience professionnelle, les responsabilités exercées par l'intéressé(e), actuelles et passées et sa participation au rayonnement de l'établissement ainsi que l'appréciation et l'avis du chef d'établissement.
Il vous appartiendra d'informer individuellement chaque personne promouvable de votre établissement en lui

précisant qu'elle remplit les conditions pour prétendre à une promotion à l'échelon exceptionnel de la hors-classe des professeurs de l'Ensam et qu'elle peut, à ce titre, constituer un dossier de demande d'avancement.

II - Constitution des dossiers

Vous inviterez tous les agents promouvables à faire parvenir le dossier de demande d'avancement rempli avec le plus grand soin ainsi que la liste des titres, travaux, publications afin de faciliter l'examen de leur dossier par nos services en vue de l'inscription au tableau d'avancement (voir annexe ci-jointe).
Il vous appartiendra ensuite d'établir un rapport détaillé pour chaque agent promouvable qui a constitué un dossier et de revêtir l'annexe ci-jointe d'un avis motivé.
Vous veillerez à ce que tous les dossiers qui vous sont remis soient classés par ordre préférentiel en recueillant tous les avis nécessaires au sein de votre établissement.
Au terme de la montée en charge, l'alimentation de cet échelon spécial dépendra uniquement du départ des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers hors classe détenteurs de cet échelon, faisant valoir leurs droits à la retraite. J'attire donc votre attention sur l'impact de l'âge des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers hors classe nommés à l'échelon exceptionnel quant aux possibilités ultérieures d'accès à cet échelon.
Il vous incombe également de vérifier la complétude du dossier d'avancement de chaque agent promouvable et de porter une attention particulière au rapport détaillé et à la motivation de l'avis du chef d'établissement. Attention, l'avis du chef d'établissement ne peut se limiter aux mentions « favorable » ou « défavorable » sans plus de précisions.
Les dossiers ainsi remplis seront transmis par envoi groupé au ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation - Département DGRH A2-2 - 72, rue Regnault - 75243 Paris Cedex 13 **au plus tard le vendredi 15 octobre 2021**.

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Le directeur général des ressources humaines,
Vincent Soetemont

Annexe

↳ *Dossier de demande d'avancement à l'échelon exceptionnel de la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers*

Annexe – Dossier de demande d'avancement à l'échelon exceptionnel de la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers

Ce document est une trame pour vous aider à rédiger votre demande d'avancement de grade.

***Les dossiers d'avancement à l'échelon exceptionnel de la hors-classe** seront examinés en tenant compte notamment de la valeur et des acquis de l'expérience professionnelle, des responsabilités exercées, actuellement ou durant la carrière, de la participation au rayonnement de l'établissement et de l'appréciation et avis du chef d'établissement.*

Vous êtes invité à renseigner autant que possible les différentes rubriques, notamment depuis la nomination à la hors-classe.

Nom de famille : Nom d'usage : Prénom : Date de naissance :

Situation administrative	Professeur de l'Ensam hors classe
- Établissement d'affectation :	
- Échelon :	6
- Date de promotion dans l'échelon :	

Synthèse de la carrière

Présentation chronologique des principales étapes de la carrière faisant apparaître les éléments les plus significatifs (diplômes, positions, principales responsabilités et activités).

Activité pédagogique

Responsabilités collectives

Activités scientifiques et participation au rayonnement de l'établissement

Autres informations

Rubrique pour la présentation de situations particulières ou d'actions non mentionnées précédemment.

Cette rubrique est destinée notamment aux professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers reconnus travailleurs handicapés (RQTH) pour leur permettre de présenter l'ensemble des activités exercées en compensation de leur handicap.

Le 2021

Signature de l'agent

Annexe

- **Liste des travaux et publications et toutes autres pièces justificatives**

Appréciation et avis détaillé du chef d'établissement

AVIS DU CHEF D'ÉTABLISSEMENT ET CLASSEMENT
Joindre impérativement à cet avis motivé un rapport détaillé **- Classement : sur candidats Le 2021** **Signature**

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation > www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Personnels

Promotion de grade

Accès au grade de professeur hors classe de l'École nationale supérieure d'arts et métiers - année 2021

NOR : ESRH2121756N
note de service du 28-6-2021
MESRI - DGRH A2-2

Texte adressé aux présidentes et présidents d'université ; aux directeurs et directrices d'établissement d'enseignement supérieur ; aux recteurs et rectrices d'académie, chanceliers et chancelières des universités

Conformément aux dispositions de l'article 14 du décret n° 88-651 du 6 mai 1988 modifié, les professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers peuvent être promus au grade de professeur de l'Ensam hors classe.
La présente note de service a pour objet de fixer les conditions de préparation du tableau d'avancement à la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers.
La loi n° 2019-828 du 6 août 2019 de transformation de la fonction publique a modifié en profondeur les attributions des commissions administratives paritaires (CAP), dont les compétences sont recentrées essentiellement sur l'examen des décisions individuelles défavorables (licenciement pour insuffisance professionnelle, révision du compte rendu d'entretien professionnel, refus de trois postes suite à réintégration après disponibilité). Ainsi, depuis le 1er janvier 2020, elles ne sont plus compétentes pour l'examen des mutations et depuis le 1er janvier 2021, elles perdent leurs attributions en matière d'avancement et de promotions.
Le décret n° 2019-1265 du 29 novembre 2019 relatif aux lignes directrices de gestion et à l'évolution des attributions des commissions administratives paritaires précise les règles et procédures pour l'édiction des lignes directrices de gestion (LDG) notamment en matière de promotion et de valorisation des parcours.
Les LDG ministérielles publiées au Bulletin officiel n° 44 du 19 novembre 2020 permettent de préciser les modalités de prise en compte de la valeur professionnelle et des acquis de l'expérience professionnelle des agents, notamment à travers la diversité du parcours et des fonctions exercées, les formations suivies, les conditions particulières d'exercice, attestant de l'engagement professionnel, de la capacité d'adaptation et, le cas échéant, de l'aptitude à l'encadrement d'équipes. Elles visent également à assurer l'égalité entre les femmes et les hommes dans les procédures de promotion en tenant compte de la part respective des femmes et des hommes dans les corps et grades concernés.

I - Personnels concernés

Peuvent être promus au grade de professeur de l'Ensam hors classe, les professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers, quel que soit leur établissement d'affectation, ayant atteint au moins le 7e échelon de la classe normale au plus tard le 31 décembre 2021 pour les promotions à attribuer au titre de l'année 2021, et inscrits sur un tableau d'avancement commun à toutes les disciplines.
Conformément aux termes des LDG ministérielles, les dossiers des candidats à cet échelon seront examinés par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, au regard, notamment, des critères suivants : la qualité du dossier déposé par le candidat, l'expérience professionnelle, les responsabilités exercées par l'intéressé(e), actuelles et passées et sa participation au rayonnement de l'établissement ainsi que l'appréciation et l'avis du chef d'établissement.
Il vous appartiendra d'informer individuellement chaque personne promouvable de votre établissement en lui précisant qu'elle remplit les conditions pour prétendre à une promotion au grade de professeur de l'Ensam hors classe et qu'elle peut, à ce titre, constituer un dossier de demande d'avancement.

II - Constitution des dossiers

Vous inviterez tous les agents promouvables à faire parvenir le dossier de demande d'avancement rempli avec le plus grand soin ainsi que la liste des titres, travaux, publications afin de faciliter l'examen de leur dossier par nos services en vue de l'inscription au tableau d'avancement (voir annexe ci-jointe).
Il vous appartiendra ensuite d'établir un rapport détaillé pour chaque agent promouvable qui a constitué un dossier et de revêtir l'annexe ci-jointe d'un avis motivé.
Vous veillerez à ce que tous les dossiers qui vous sont remis soient classés par ordre préférentiel en recueillant tous les avis nécessaires au sein de votre établissement.
Il vous incombe également de vérifier la complétude du dossier d'avancement de chaque agent promouvable et de porter une attention particulière au rapport détaillé et à la motivation de l'avis du chef d'établissement. Attention, l'avis du chef d'établissement ne peut se limiter aux mentions « favorable » ou « défavorable » sans plus de précisions.
Les dossiers ainsi remplis seront transmis par envoi groupé au ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation - Département DGRH A2-2 - 72, rue Regnault - 75243 Paris Cedex 13 **au plus tard le vendredi 15 octobre 2021**.

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Le directeur général des ressources humaines,
Vincent Soetemont

Annexe

↳ *Dossier de demande d'avancement à la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers*

Annexe – Dossier de demande d'avancement à la hors-classe des professeurs de l'École nationale supérieure d'arts et métiers

Ce document est une trame pour vous aider à rédiger votre demande d'avancement de grade.

Les dossiers d'avancement à la hors-classe *seront examinés en tenant compte notamment de la valeur et des acquis de l'expérience professionnelle, des responsabilités exercées, actuellement ou durant la carrière, de la participation au rayonnement de l'établissement et de l'appréciation et avis du chef d'établissement.*

Vous êtes invité à renseigner autant que possible les différentes rubriques.

Nom de famille :

Nom d'usage :

Prénom :

Date de naissance :

Situation administrative

- Établissement d'affectation :

- Échelon :

- Date de promotion dans l'échelon :

Synthèse de la carrière

Présentation chronologique des principales étapes de la carrière faisant apparaître les éléments les plus significatifs (diplômes, positions, principales responsabilités et activités).

Activité pédagogique

Responsabilités collectives

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation > www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Activités scientifiques et participation au rayonnement de l'établissement

Autres informations

Rubrique pour la présentation de situations particulières ou d'actions non mentionnées précédemment.

Cette rubrique est destinée notamment aux enseignants-chercheurs reconnus travailleurs handicapés (RQTH) pour leur permettre de présenter l'ensemble des activités exercées en compensation de leur handicap.

Le 2021

Signature de l'agent

Annexe

- **Liste des travaux et publications et toutes autres pièces justificatives**

Appréciation et avis détaillé du chef d'établissement

AVIS DU CHEF D'ÉTABLISSEMENT ET CLASSEMENT
Joindre impérativement à cet avis motivé un rapport détaillé **- Classement : sur candidats Le 2021** **Signature**

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation > www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Mouvement du personnel

Nomination

Directeur de l'université de technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM)

NOR : ESRS2122326A
arrêté du 16-7-2021
MESRI - DGESIP A1-5

Par arrêté de la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation en date du 16 juillet 2021, Ghislain Montavon, professeur des universités, est nommé directeur de l'université de technologie de Belfort-Montbéliard, pour un mandat de cinq ans, à compter du 1er septembre 2021.

Mouvement du personnel

Nomination

Déléguée régionale académique adjointe à la recherche et à l'innovation

NOR : ESRR2122342A
arrêté du 16-7-2021
MESRI - DGRI SITTAR C4

Par arrêté de la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation en date du 16 juillet 2021, Pascaline Toutois, ingénieure de recherche 1re classe, est nommée déléguée régionale académique adjointe à la recherche et à l'innovation pour la région Grand Est à compter du 1er septembre 2021. Le poste est localisé à Strasbourg.

Mouvement du personnel

Nomination

Directeur de l'École nationale supérieure des industries chimiques de l'université de Lorraine (Ensic)

NOR : ESRS2123032A
arrêté du 22-7-2021
MESRI - DGESIP A1-5

Par arrêté de la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation en date du 22 juillet 2021, Alain Durand, professeur de classe exceptionnelle, est nommé directeur de l'École nationale supérieure des industries chimiques (Ensic), école interne à l'université de Lorraine, pour un mandat de cinq ans, à compter du 6 août 2021.

Mouvement du personnel

Nomination

Commission des titres d'ingénieur

NOR : ESRS2123828A
arrêté du 22-7-2021
MESRI - DGESIP A1-5

Par arrêté de la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation en date du 22 juillet 2021, est nommé membre de la Commission des titres d'ingénieur pour un mandat à compter du 1er septembre 2021 courant jusqu'au 30 juin 2022 :
En qualité de membres choisis par les associations et les organisations professionnelles d'ingénieurs les plus représentatives :
- Gilles Saintemarie (Medef).

Mouvement du personnel

Nomination

Déléguée régionale académique à la recherche et à l’innovation

NOR : ESRR2122331A
arrêté du 9-8-2021
MESRI - DGRI SITTAR C4

Par arrêté de la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation en date du 9 août 2021, Stéphane Cordier, professeur des universités de classe exceptionnelle, est nommé délégué régional académique à la recherche et à l'innovation pour la région Centre-Val de Loire, à compter du 1er septembre 2021.

Mouvement du personnel

Nomination

Administrateur provisoire de l'Institut national supérieur du professorat et de l'éducation de l'académie de Nice au sein de l'université Côte d'Azur

NOR : ESRS2123045A
arrêté du 26-8-2021
MENJS - MESRI - DGESIP A1-3

Par arrêté du ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports et de la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation en date du 26 août 2021, il est mis fin, à sa demande, aux fonctions de directrice de l'Institut national supérieur du professorat et de l'éducation de l'académie de Nice au sein de l'université Côte d'Azur exercées par Catherine Blaya, à compter du 1er août 2021.
Monsieur Emmanuel Tric, professeur des universités, est nommé en qualité d'administrateur provisoire de l'Institut national supérieur du professorat et de l'éducation de l'académie de Nice au sein de l'université Côte d'Azur, à compter du 1er août 2021, jusqu'à la date de nomination d'un nouveau directeur.

Mouvement du personnel

Intégration

Inspection générale de l'éducation, du sport et de la recherche

NOR : MENI2119085D
décret du 19-7-2021 - JO du 21-7-2021
MENJS - MESRI - SG

Par décret du président de la République en date du 19 juillet 2021, Hervé Tilly, administrateur général, est intégré dans le corps des inspecteurs généraux de l'éducation, du sport et de la recherche, dans le grade d'inspecteur général de 1re classe.

Informations générales

Conseils, comités, commissions

Liste nominative des représentants à la commission centrale d'action sociale : modification

NOR : MENA2125038A
arrêté du 29-7-2021
MENJS - MESRI - SAAM A1

Vu arrêtés du 7-3-2013, du 27-12-2018, du 25-1-2019, du 2-5-2019, du 9-9-2019, du 15-1-2020 et du 14-9-2020 ; sur proposition des représentants de la MGEN

Article 1 - L'article 2 de l'arrêté du 25 janvier susvisé est modifié ainsi qu'il suit :
En qualité de représentants titulaires :
Au lieu de :
- Catherine Florentin
- Stéfan Gouzouguec

Lire :
- Caroline Garcia
- Muriel Zamord

En qualité de représentants suppléants :
Au lieu de :
- Véronique Signoret
- Muriel Zamord

Lire :
- Blanche Lochmann
- Patricia Ourcival

Article 2 - La secrétaire générale est chargée de l'exécution du présent arrêté qui sera publié aux bulletins officiels de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports et de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation.

Fait le 29 juillet 2021

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
La secrétaire générale,
Marie-Anne Lévêque

Informations générales

Conseils, comités, commissions

Désignation des membres des commissions spéciales consultatives du personnel enseignant de théologie

NOR : ESRS2123212A
arrêté du 29-7-2021
MESRI - DGRH A2-2

Vu décret n° 85-1200 du 13-11-1985 ; arrêté du 29-1-1986 ; procès-verbaux des résultats des élections de la commission spéciale consultative de théologie catholique (collège des professeurs des universités) du 1-10-2019 ; procès-verbaux des résultats des élections de la commission spéciale consultative de théologie catholique (collège des maîtres de conférences) du 1-10-2019 ; procès-verbal des résultats des élections de la commission spéciale consultative de théologie protestante (collège des professeurs des universités) du 2-10-2019 et du 21-10-2019 ; procès-verbal des résultats des élections de la commission spéciale consultative de théologie protestante (collège des maîtres de conférences) du 2-10-2019

Article 1 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie catholique comprend, au titre du collège des professeurs des universités et assimilés élus, les membres suivants :
- Marc Aoun, professeur à l'université de Strasbourg ;
- Monsieur Michele Cutino, professeur à l'université de Strasbourg ;
- Jean-Sébastien Rey, professeur à l'université de Lorraine ;
- Nathalie Siffer, professeure à l'université de Strasbourg.

Article 2 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie catholique comprend, au titre du collège des maîtres de conférences et assimilés élus, les membres suivants :
- Yves Meessen, maître de conférences à l'université de Lorraine ;
- Sébastien Milazzo, maître de conférences à l'université de Strasbourg ;
- Bertrand Dumas, maître de conférences à l'université de Strasbourg ;
- Marc Feix, maître de conférences à l'université de Strasbourg.

Article 3 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie catholique comprend, au titre du directeur de la faculté de théologie catholique, le membre suivant :
- Denis Fricker, professeur à l'université de Strasbourg.

Article 4 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie catholique comprend, au titre du collège des professeurs des universités et assimilés nommés, les membres suivants :
- Guillaume Ducœur, professeur à l'université de Strasbourg.

Article 5 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie catholique comprend, au titre du collège des maîtres de conférences et assimilés nommés, les membres suivants :
- Claire Placial, maître de conférences à l'université de Lorraine ;
- David Lemler, maître de conférences à l'université de Sorbonne Université.

Article 6 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie protestante comprend, au titre du collège des professeurs des universités et assimilés élus, les membres suivants :
- Matthieu Arnold, professeur à l'université de Strasbourg ;
- Christian Grappe, professeur à l'université de Strasbourg ;
- Monsieur Karsten Lehmkühler, professeur à l'université de Strasbourg ;
- Marc Vial, professeur à l'université de Strasbourg.

Article 7 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie protestante comprend,

au titre du collège des maîtres de conférences et assimilés élus, les membres suivants :
- Gabriella Aragione, maître de conférences à l'université de Strasbourg ;
- Monsieur Michael Langlois, maître de conférences à l'université de Strasbourg ;
- Christophe Monnot, maître de conférences à l'université de Strasbourg ;
- Madeleine Wieger, maître de conférences à l'université de Strasbourg.

Article 8 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie protestante comprend, au titre du directeur de la faculté de théologie protestante, le membre suivant :
- Rémi Gounelle, professeur à l'université de Strasbourg.

Article 9 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie protestante comprend, au titre du collège des professeurs des universités et assimilés nommés, le membre suivant :
- Valentine Zuber, professeure à l'EPHE Paris.

Article 10 - La commission spéciale consultative du personnel enseignant de théologie protestante comprend, au titre du collège des maîtres de conférences et assimilés nommés, les membres suivants :
- Émilie Dosquet, maître de conférences à l'université de Cergy Paris ;
- Nicolas Champ, maître de conférences à l'université Bordeaux Montaigne.

Article 11 - Le directeur général des ressources humaines est chargé de l'exécution du présent arrêté qui sera publié au Bulletin officiel de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation.

Fait le 29 juillet 2021

Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
Le directeur général des ressources humaines,
Vincent Soetemont

Informations générales

Services régionaux académiques

Création d'un service régional académique des études et des statistiques dans la région académique Hauts-de-France

NOR : MENG2123261A
arrêté du 20-7-2021
MENJS - MESRI - SG

Vu Code de l'éducation, notamment articles R. 222-16-4 et R. 222-24-6 ; avis du comité régional académique des 19-12-2019, 29-1-2020 et 15-6-2020 ; avis des comités techniques spéciaux académiques des académies de Lille et d'Amiens réunis conjointement le 23-6-2021 ; avis des comités techniques académiques des académies de Lille et d'Amiens réunis conjointement le 5-7-2021 ; sur proposition de la rectrice de la région académique Hauts-de-France

Article 1 - En application des dispositions de l'article R. 222-24-6 du Code de l'éducation, il est créé dans la région académique Hauts-de-France un service régional académique chargé des études et des statistiques, dénommé « service régional académique des études et des statistiques (Sraes) ». Ce service est placé sous l'autorité hiérarchique du recteur de région académique.
Le service régional académique a pour objectif, en termes de statistiques et d'aide au pilotage, de mieux répondre aux enjeux de la région académique et de construire une réponse régionale comportant un haut niveau d'ingénierie tout en maintenant les capacités de répondre aux besoins académiques.

Article 2 - Le service régional académique des études et des statistiques (Sraes) exerce des missions de collecte et de contrôle de la qualité de l'information statistique, de valorisation et de diffusion des données d'étude et de conduite des démarches d'évaluation. À ce titre :
1° il assure la production statistique dans le cadre du programme national de travail de la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (Depp), des diverses enquêtes nationales à la demande d'autres directions et services de l'administration centrale et des besoins régionaux et académiques ;
2° il propose des outils et des indicateurs d'aide à la décision et d'appui statistique au pilotage pour les acteurs régionaux et académiques aux différents niveaux (région académique, académies, départements, circonscriptions, établissements, écoles) ;
3° il est chargé de la collecte et du contrôle de la qualité de l'information statistique ;
4° il établit des études, des analyses, des recherches et des publications pour appuyer et valoriser la mise en œuvre des politiques publiques aux différents échelons territoriaux ;
5° il assure les travaux d'étude et de recherche qui sont menés entre le service régional académique et d'autres partenaires.
Le programme de travail du service régional académique est validé chaque année en comité régional académique. Il détermine notamment l'articulation entre les besoins statistiques régionaux et académiques.

Article 3 - Le service de région académique des études et des statistiques est organisé en bi-site, sur les deux sites des rectorats de Lille et d'Amiens.
Le service de région académique des études et des statistiques est constitué :

- de deux pôles de dimension régionale répartis l'un et l'autre sur les deux sites rectoraux :

- le pôle « collecte de données et ingénierie d'enquêtes » ;
- le pôle « études et valorisation de l'information statistique » ;

- de deux cellules académiques, implantées l'une au rectorat de Lille, l'autre au rectorat d'Amiens.

Les pôles régionaux développent leur action sur le niveau régional pour ce qui concerne les besoins des services régionaux et sur le niveau académique pour ce qui concerne les besoins des services académiques en prenant appui sur les référents académiques mentionnés à l'article 6.
Les deux cellules académiques garantissent les traitements de données spécifiques à chacune des deux académies, afin de préserver, outre une action en proximité, une capacité académique de travail sur les

prévisions et constats d'effectifs, notamment dans le cadre de la préparation de la rentrée scolaire.
La coordination du Sraes avec les autres services régionaux est assurée sous l'autorité du secrétaire général de région académique.

Article 4 - Le service de région académique des études et des statistiques est dirigé par un responsable régional, chef de service de région académique, qui coordonne l'action des deux sites d'implantation dudit service. Le chef du Sraes est assisté d'un adjoint placé sous son autorité hiérarchique.
Le chef du Sraes est placé sous l'autorité hiérarchique du recteur de région académique. Il est, ainsi que son adjoint et l'ensemble des personnels du service régional académique, rattaché administrativement au secrétaire général de région académique.
Indépendamment de leur lieu d'exercice ainsi que de la nature de leurs fonctions, qu'elles relèvent du champ des compétences académiques au sein des deux cellules académiques, ou des compétences de la région académique au sein des deux pôles régionaux académiques, les personnels affectés dans le service régional académique des études et des statistiques sont placés, pour l'exercice de leurs fonctions, sous l'autorité hiérarchique du chef du Sraes.
Le responsable du Sraes établit un projet de service pluriannuel et remet chaque année au recteur de région académique un rapport d'activité du service régional dressant le bilan de l'année écoulée.

Article 5 - L'emploi de chef de service de région académique des études et des statistiques est implanté au rectorat de l'académie d'Amiens ; celui de son adjoint est implanté au rectorat de l'académie de Lille.

Article 6 - Chaque pôle régional académique mentionné à l'article 3 compte un responsable de pôle assisté d'un adjoint.
Les deux cellules académiques comptent chacune trois référents :

- un responsable de site, qui, selon l'académie d'implantation de la cellule, est soit le chef du service régional académique des études et des statistiques, soit son adjoint ;
- deux adjoints au responsable de site : un chef de pôle et un adjoint au chef de pôle.

En leur qualité de responsables de site et de référents académiques, le chef du Sraes et son adjoint sont respectivement placés sous l'autorité fonctionnelle du recteur de l'académie d'Amiens et du recteur de l'académie de Lille, par délégation du recteur de région académique, pour l'exécution des missions relevant du champ des compétences académiques.

Article 7 - Le présent arrêté entre en vigueur le 1er septembre 2021.

Article 8 - La rectrice de région académique des Hauts-de-France, rectrice de l'académie de Lille, est chargée de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Bulletin officiel de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports et au Bulletin officiel de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation.

Pour le ministre de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, et par délégation,
Pour la ministre de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, et par délégation,
La secrétaire générale,
Marie-Anne Lévêque